

Измерения расстояний в Солнечной системе – триумф математики

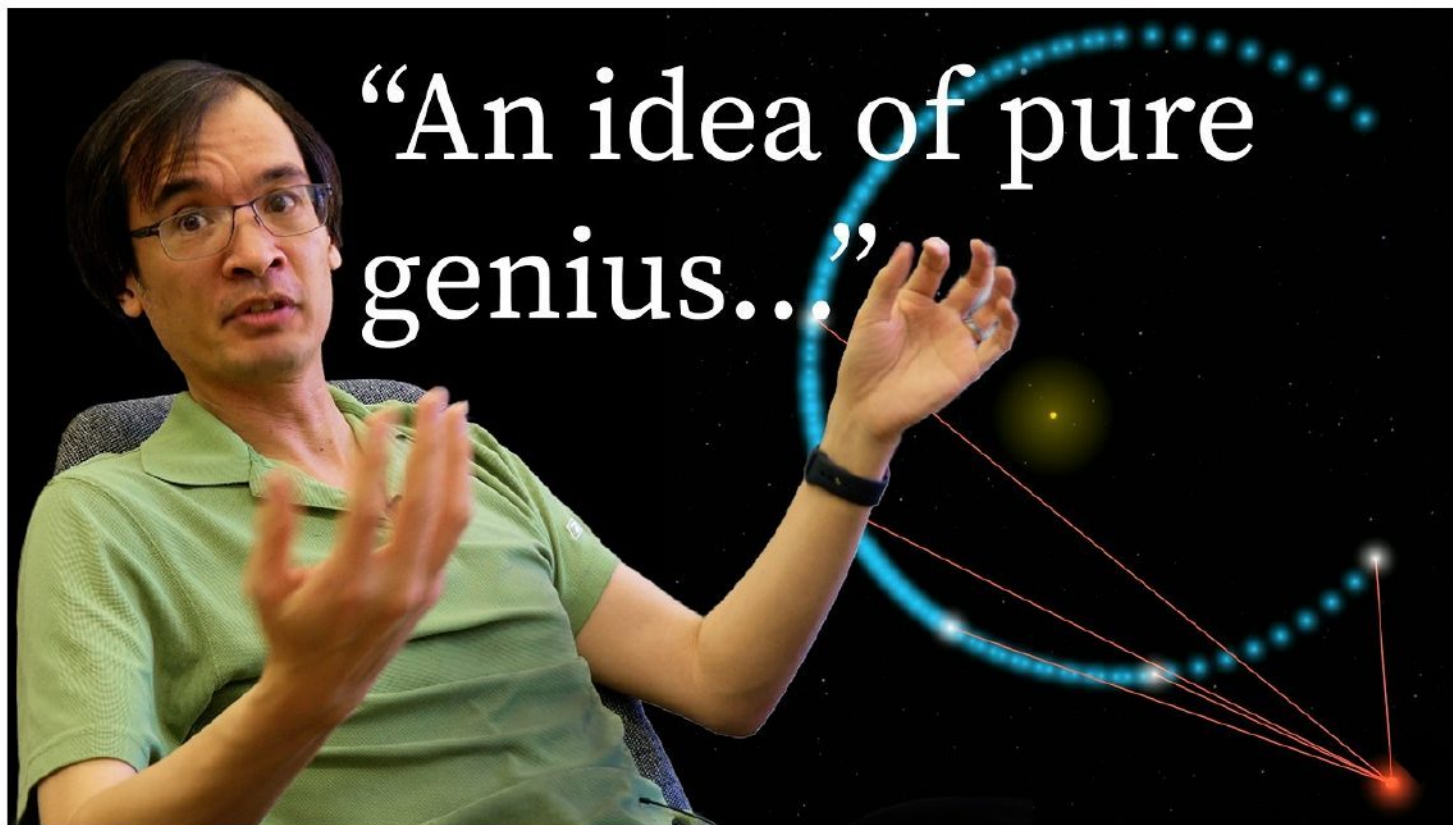
Гасников Александр

Университет Иннополис

gasnikov@yandex.ru

7 апреля 2026

Теренс Тао, Космические расстояния...

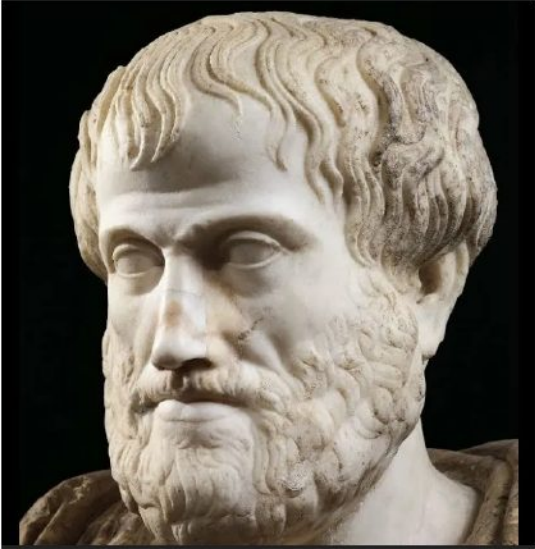


https://www.youtube.com/watch?v=YdOXS_9_P4U

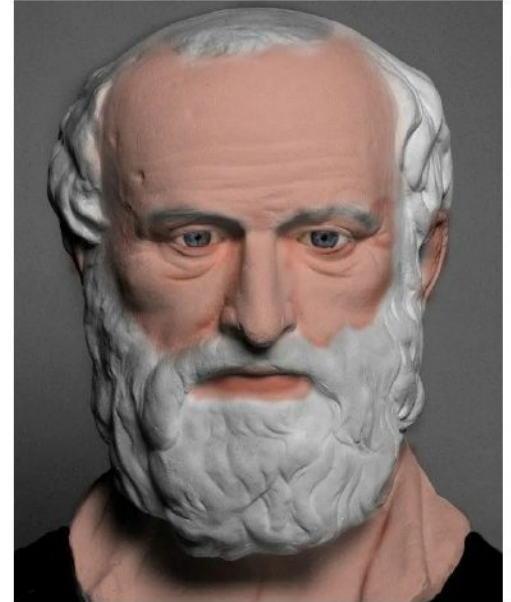
<https://www.youtube.com/watch?v=hFMaT9oRbs4>

Историю измерения Солнечной системы — один из величайших триумфов математического мышления.

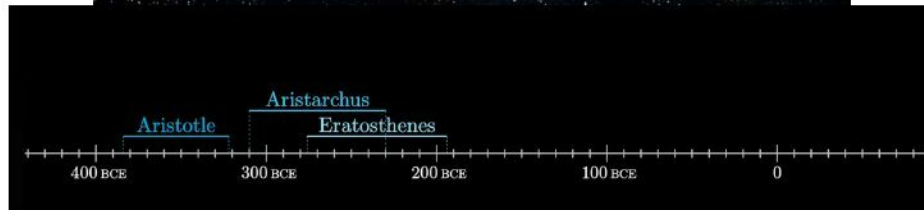
Почему Земля имеет форму шара?



Аристотель

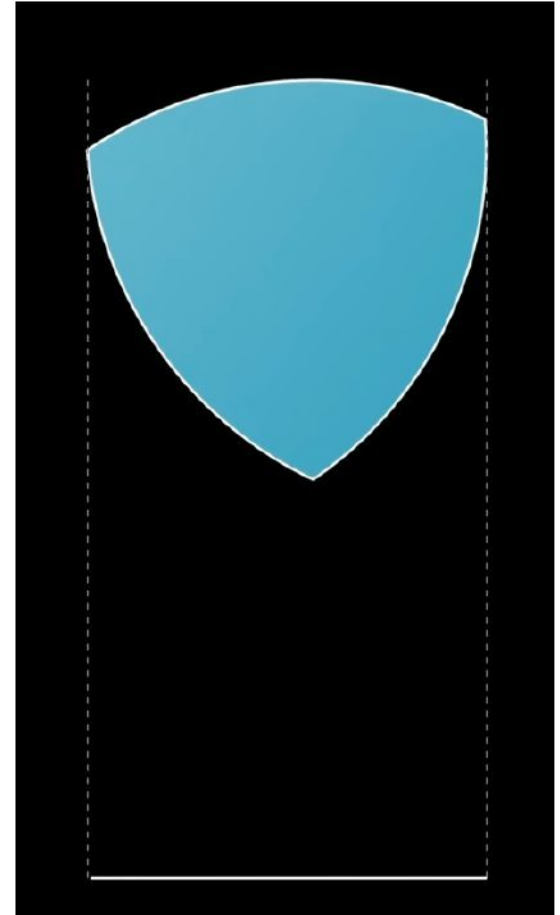
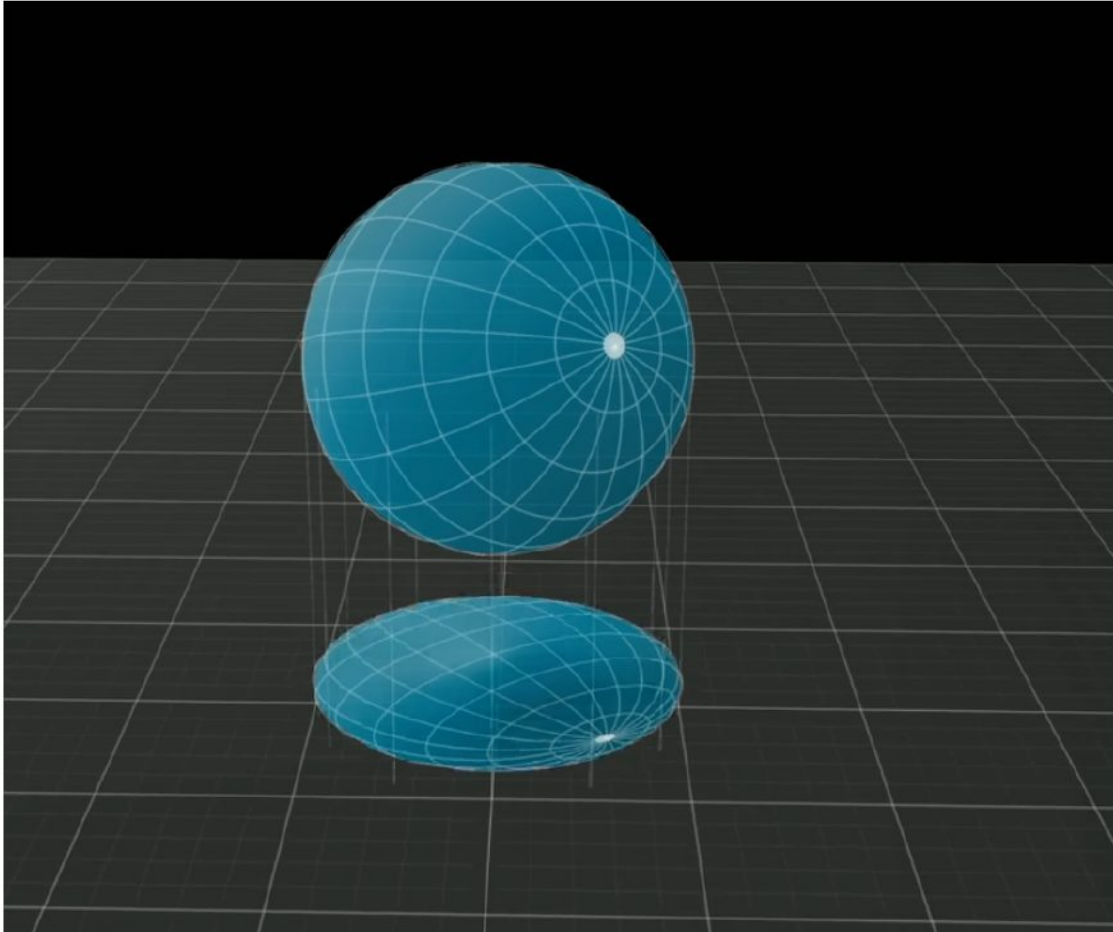


Эратосфен

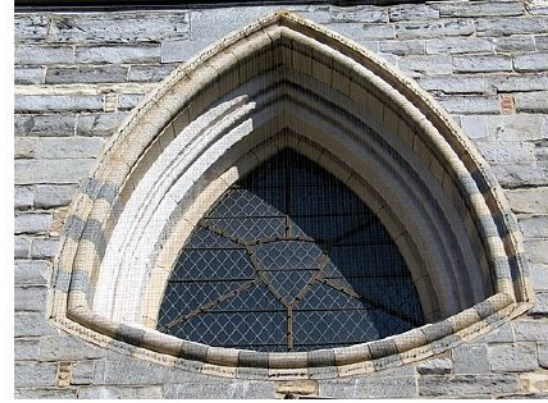
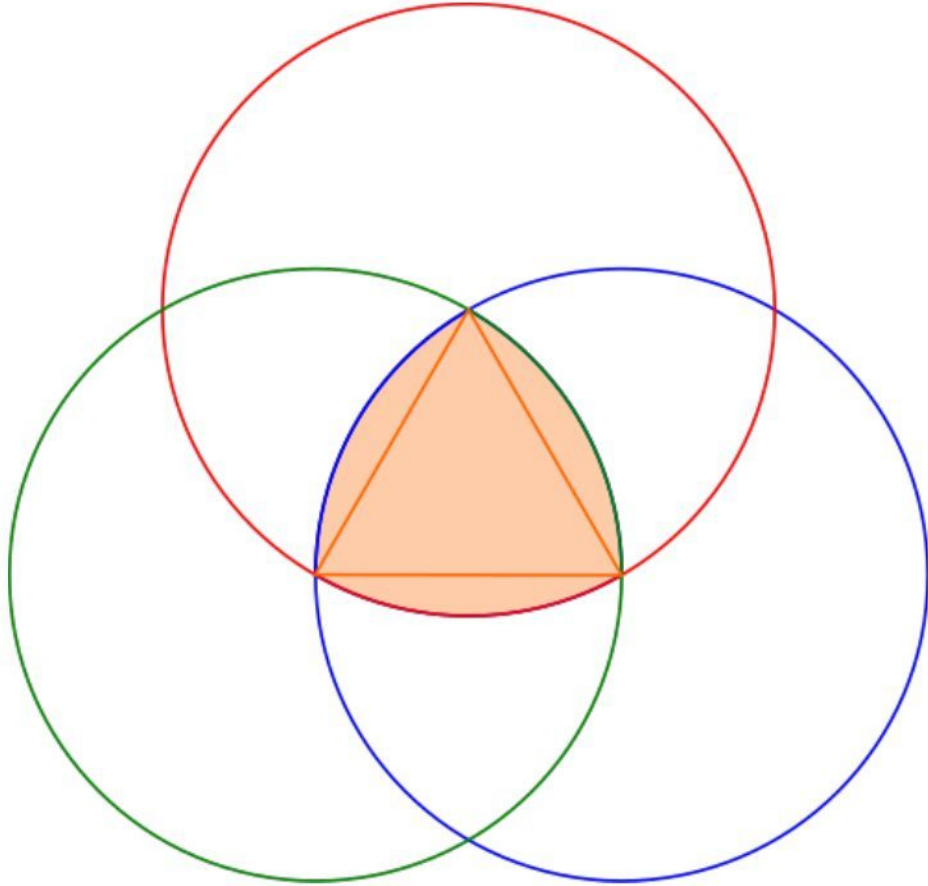


Почему Земля имеет форму шара?

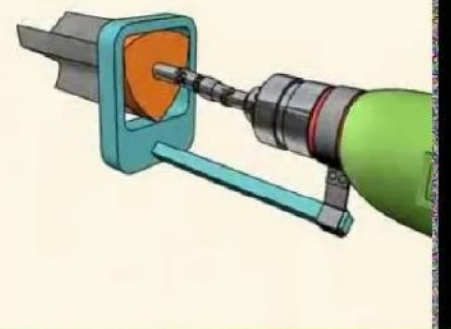
Сначала поняли это по Луне



Треугольник Рело

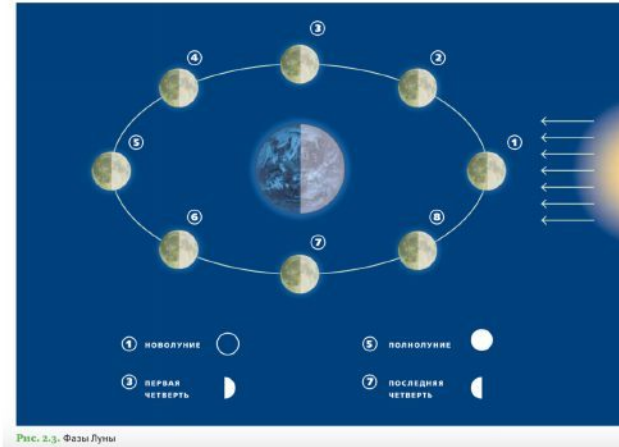


- Сверление квадратных отверстий (Сверло Уаттса)



Почему Земля имеет форму шара?

Сначала поняли это по Луне



1. Шарообразность Земли

Пифагорейцы (VI–V вв. до н.э.) — первые, кто постулировал сферичность, но скорее из эстетических соображений (сфера — «совершенная» фигура).

Аристотель (~330 до н.э.) дал три эмпирических аргумента:

- Тень Земли на Луне при затмении всегда **круглая** — единственное тело, дающее круглую тень при любой ориентации, это сфера.
- При движении на юг/север **меняется высота звёзд** над горизонтом.
- Корабли **скрываются за горизонт** корпусом раньше, чем мачтой.

Почему Земля имеет форму шара?

Сначала поняли это по Луне



Солнечные и лунные затмения не ежемесячные, потому что орбита Луны наклонена к эклиптике примерно на 5° , и условия точной коллинеарности выполняются только во время коротких «сезонов затмений», а не при каждом новолунии и полнолунии. В среднем на Земле бывает около **2 – 5** солнечных и **1–3** лунных затмений в год, причём далеко не каждое из них видно из конкретной точки земной поверхности

Почему происходят лунные затмения?

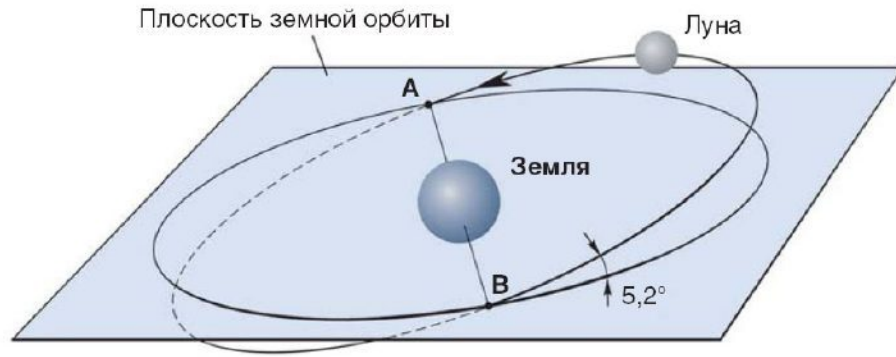


Рис. 12.11. Взаимное расположение плоскости лунной орбиты и плоскости орбиты Земли. Точки А и В — узлы лунной орбиты

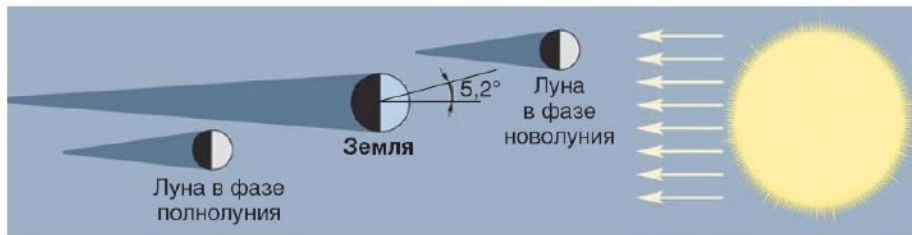
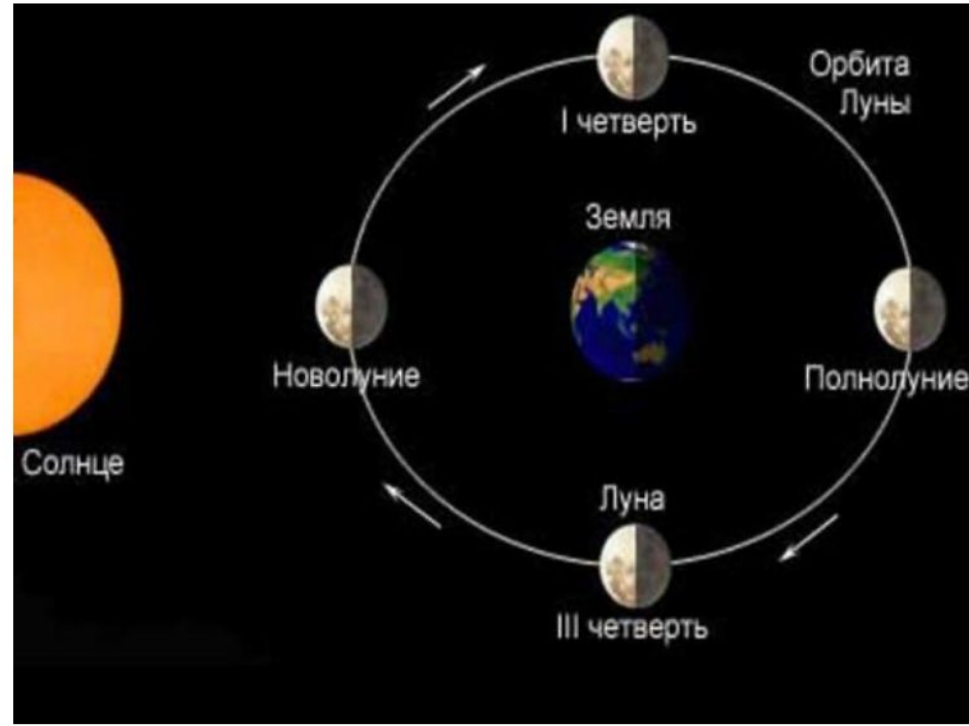


Рис. 12.12. Солнечные и лунные затмения происходят только в моменты новолуния и полнолуния соответственно. Кроме этого, Луна должна располагаться вблизи узлов своей орбиты, иначе (как на этом рисунке) тени проходят мимо цели



Диаметр Земли

2. Диаметр Земли — Эратосфен (~240 до н.э.)

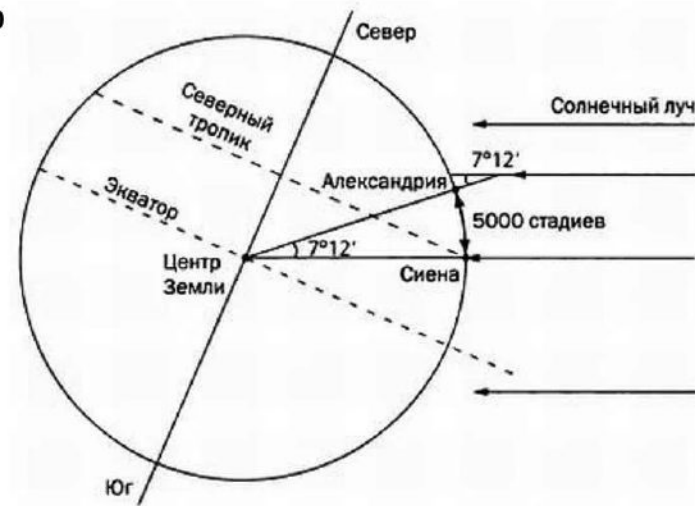
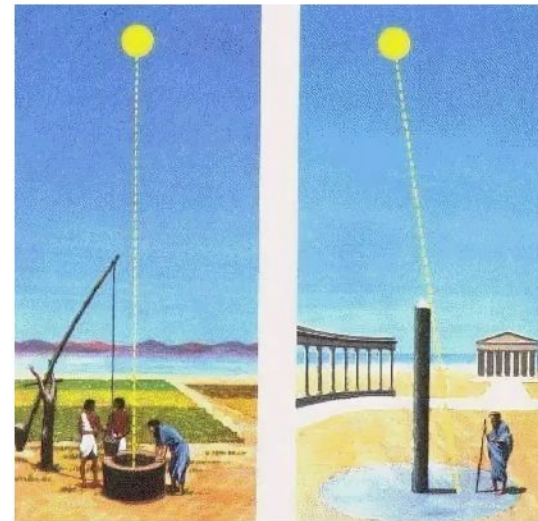
Гениальный по простоте метод:

- В **Сиене** (Асуан) в день летнего солнцестояния Солнце стоит в зените — вертикальный шест не даёт тени.
- В **Александрии** в тот же момент шест отбрасывает тень, соответствующую углу $\alpha \approx 7.2^\circ \approx 1/50$ полного круга.
- Расстояние Сиена–Александрия ≈ 5000 стадиев.

Логика: если параллельные лучи Солнца падают на сферу, то разница зенитных углов двух точек равна центральному углу дуги между ними:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{d}{2\pi R} \Rightarrow C = 2\pi R = \frac{360^\circ}{\alpha} \cdot d = 50 \times 5000 = 250\,000 \text{ стадиев}$$

При стадии ≈ 157.5 м это даёт **$C \approx 39\,375$ км** — ошибка менее 2% от истинного значения ($\sim 40\,075$ км).



Луна и Земля

3. Расстояние до Луны и её диаметр — Аристарх и Гиппарх

3а. Диаметр Луны (Аристарх Самосский, ~270 до н.э.)

Во время **лунного затмения** Аристарх наблюдал, что тень Земли на Луне имеет определённый размер. Он оценил, что диаметр Луны составляет примерно **1/3 диаметра Земли** (реально ≈ 0.27 , так что грубо верно).

Ключевое наблюдение: угловой диаметр Луны на небе $\approx 0.5^\circ$.



Луна и Земля

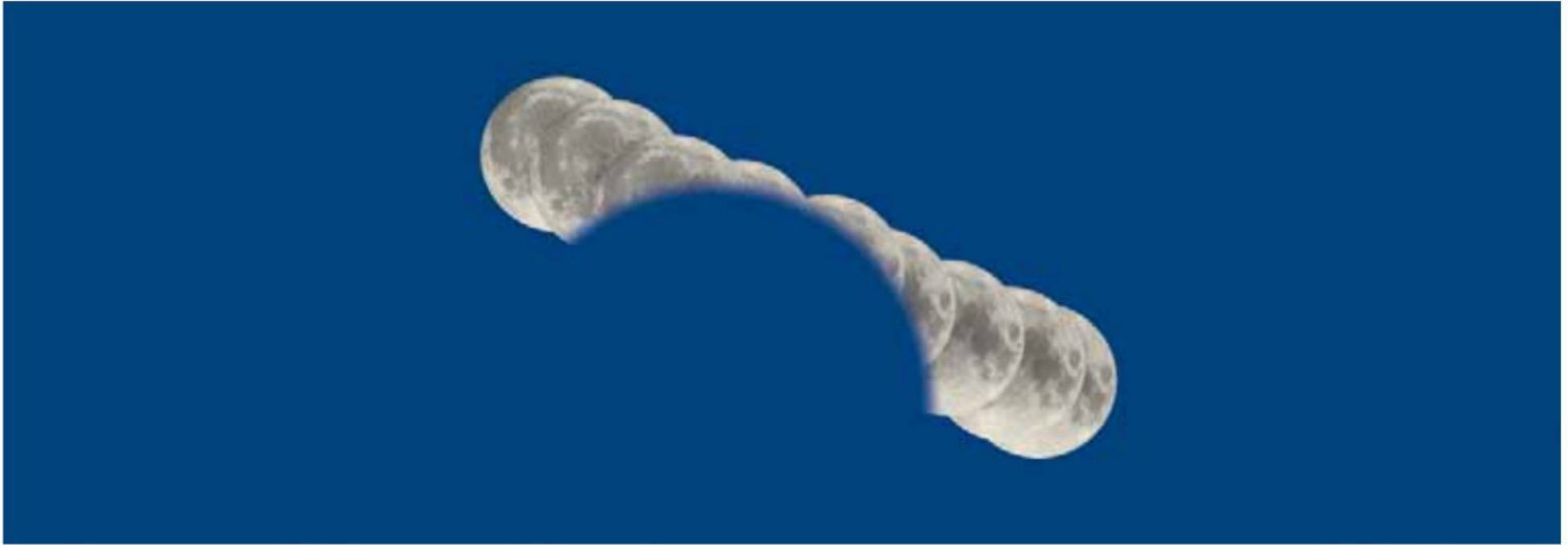
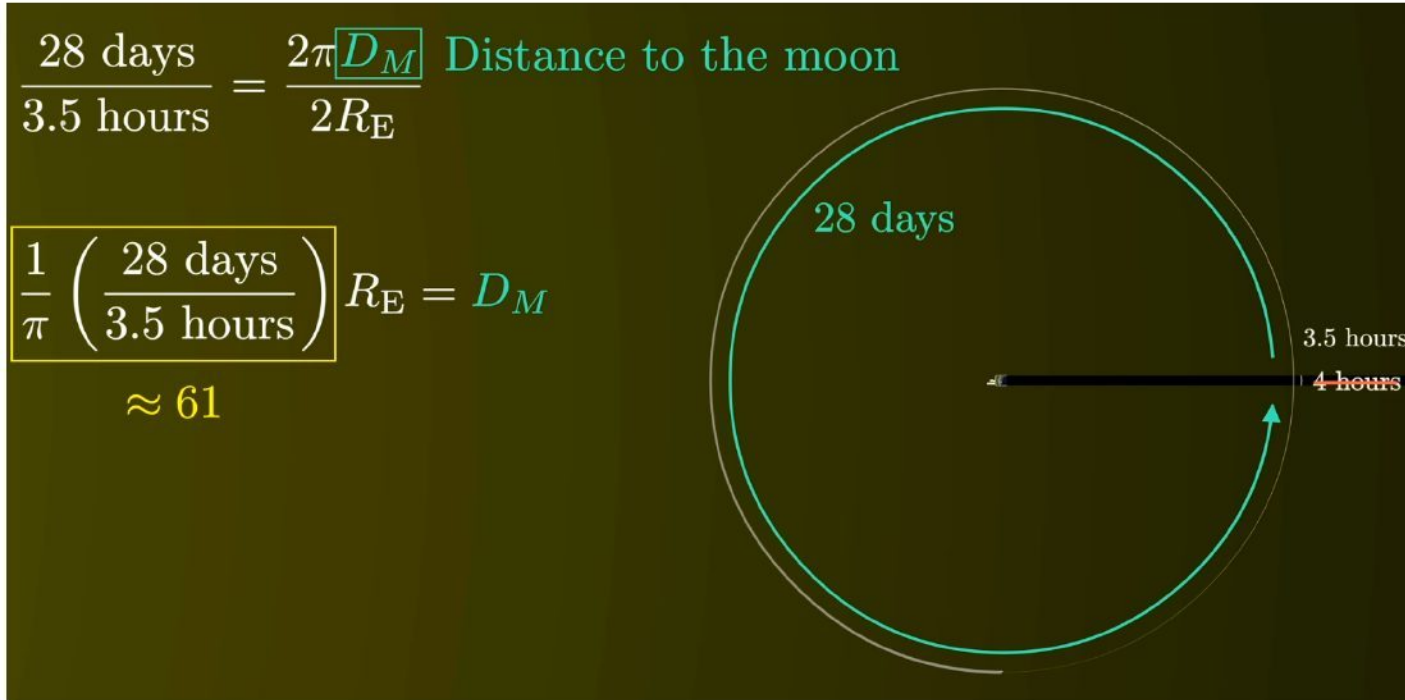


Рис. 2.13. Разные фазы Луны, совмещённые на одной фотографии

Луна и Земля



Aristarchus of Samos



Можно измерить диаметр Луны через продолжительность полного Лунного затмения

Измерения диаметра Луны по времени ее восхода

Небесная сфера вращается на 360° за 24 часа (точнее, за один звёздный день $\approx 23\text{ч } 56\text{мин}$, но для грубой оценки — 24 часа). Угловая скорость вращения:

$$\omega = \frac{360^\circ}{24 \times 60 \text{ мин}} = 0.25^\circ / \text{мин}$$

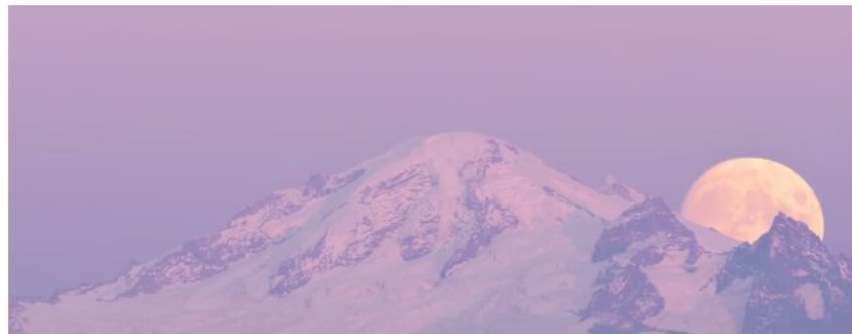
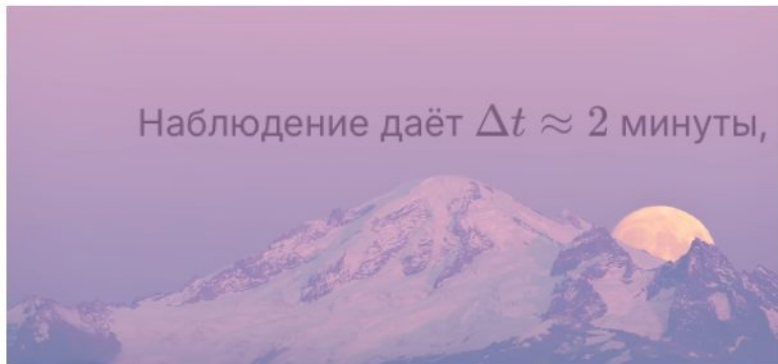
Наблюдатель засекает момент появления **верхнего края** Луны над горизонтом и момент, когда **нижний край** отрывается от горизонта. Пусть это время Δt .

За это время небесная сфера повернулась на угол, равный угловому диаметру Луны:

$$\theta = \omega \cdot \Delta t$$

Наблюдение даёт $\Delta t \approx 2$ минуты, откуда:

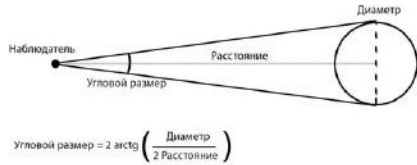
$$\theta \approx 0.25 \times 2 = 0.5^\circ$$



Луна и Земля

3б. Расстояние до Луны (Гиппарх, ~150 до н.э.)

Зная угловой диаметр Луны $\theta \approx 0.5^\circ$ и её линейный диаметр $d_{\text{л}}$:

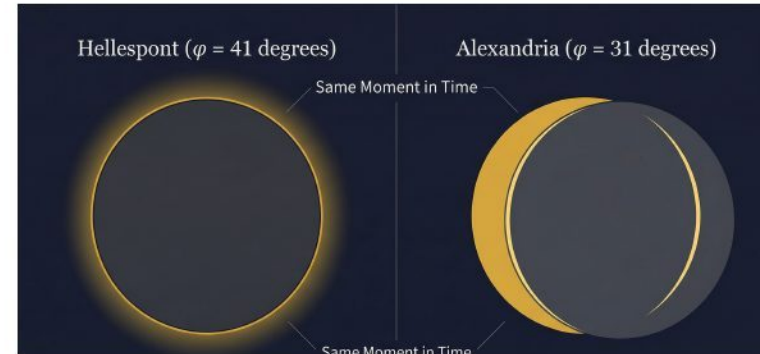
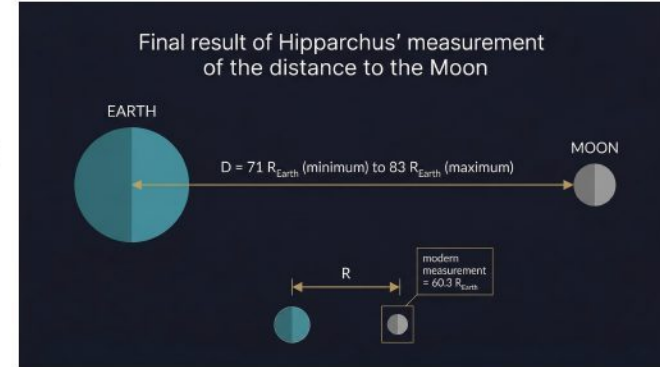


$$D_{\text{л}} = \frac{d_{\text{л}}}{\tan \theta} \approx \frac{d_{\text{л}}}{\theta_{\text{рад}}}$$

Гиппарх использовал более изощрённый метод — **параллакс Луны** при солнечном затмении. Затмение, полное в Геллеспонте, было лишь частичным (4/5 диска) в Александрии. Зная расстояние между городами и разницу в наблюдаемом положении Луны, он получил:

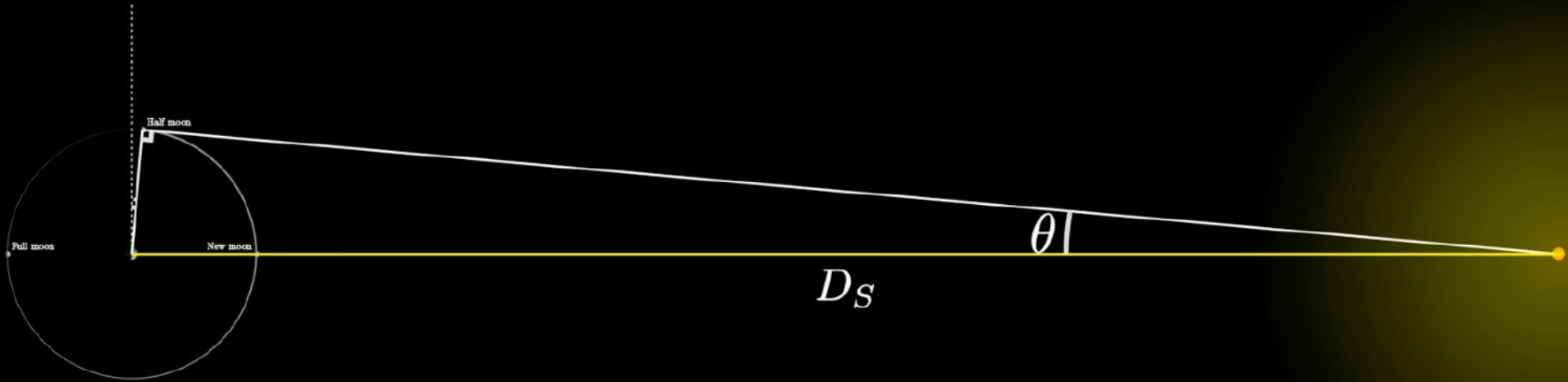
$$D_{\text{л}} \approx 60-70 R_{\oplus}$$

Истинное значение: $\sim 60.3 R_{\oplus}$ — блестящий результат.



Расстояние до Солнца

$$D_S = \frac{D_M}{\sin(\theta)}$$



Аристарх сильно ошибся в вычислении угла «на глазок». Он исходил из 6 часового отклонения положения Луны в момент точной полуфазы от положения, когда угол Луна-Земля-Солнце равен 90. На самом деле, отклонение около 30 минут.

Расстояние до Солнца

Метод Аристарха Самосского (~270 до н.э.)
Измерение расстояния до Солнца через квадратуру Луны

Луна
(квадратура) $\alpha = 87^\circ$

Земля
расстояние
Земля-Луна (ZL)

Солнце

$\angle ZLS = 90^\circ$ (Луна в квадратуре)

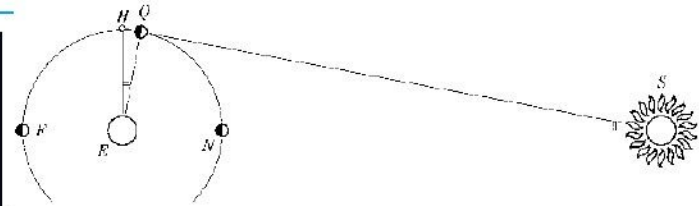
$$\frac{ZS}{ZL} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\alpha = 87^\circ \Rightarrow \frac{ZS}{ZL} \approx 19$$

Реальное значение:

$$\alpha_{\text{ист}} = 89^\circ, 85' \Rightarrow ZS/ZL \approx 389$$

Ошибка Аристарха: в ~20 раз

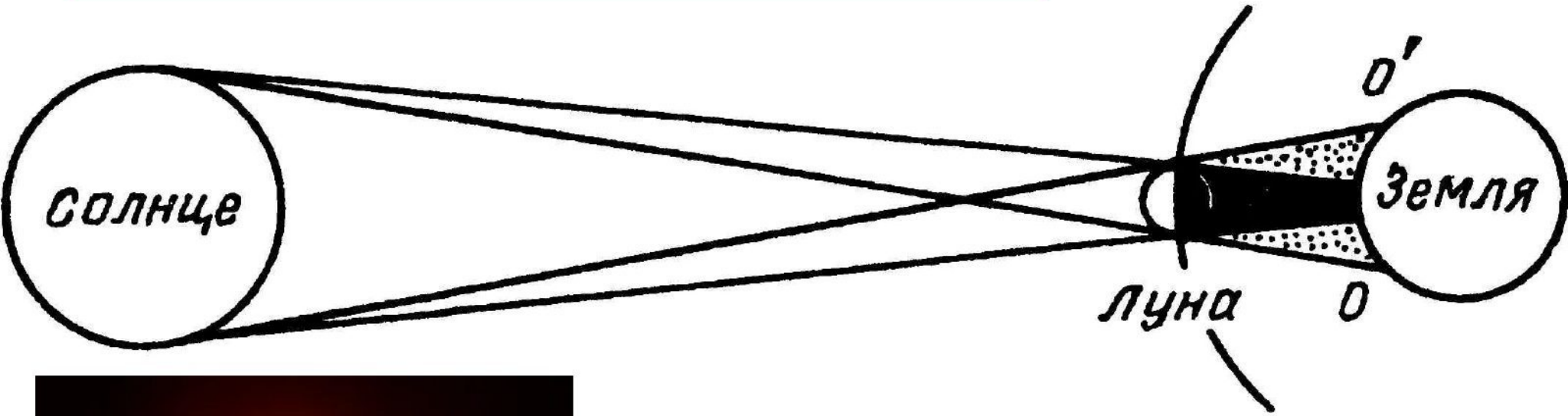


Aristarchus's Guess: $D_S = 20D_M$

True answer: $D_S \approx 370D_M$

Оценив расстояния до Солнца, Аристарх понял, что Солнце очень большое. Тогда он предположил, что Земля вращается вокруг Солнца. Но это противоречило наблюдениям, что Земля не меняет своего положения относительно Звезд (противоречия, конечно, не было — звезды очень далеко, но тогда это еще было непонятно), поэтому гелиоцентрическая теория Аристарха не была принята тогда.

Диаметр Солнца



Диаметр Солнца далее следует из того, что угловые размеры Солнца и Луны почти одинаковы ($\sim 0.5^\circ$):

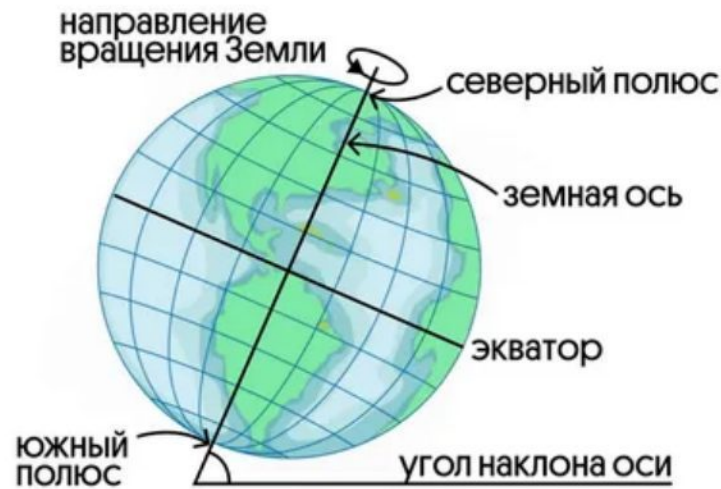
$$\frac{d_{\odot}}{D_{\odot}} \approx \frac{d_{\text{л}}}{D_{\text{л}}} \Rightarrow d_{\odot} \approx d_{\text{л}} \cdot \frac{D_{\odot}}{D_{\text{л}}}$$

Вращение Земли вокруг своей оси



Рис. 1.25. Вращение звёзд вокруг Северного полюса мира. Фотография с выдержкой 6 ч, сделанная в Гималаях

Вращение Земли вокруг своей оси можно проиллюстрировать при помощи наблюдаемого суточного движения звёзд вокруг Полюса мира — определённой точки на небесной сфере. Северный полюс мира находится в созвездии Малой Медведицы, Южный полюс мира — в созвездии Октант. На фотографии (рис. 1.25), снятой в Гималаях с суточной выдержкой, зафиксировано видимое вращение звёзд вокруг Северного полюса мира.



Понимание причин дня и ночи

- Практическая связь «Солнце над горизонтом — день, под горизонтом — ночь» очевидна с доисторических времён; вопрос был в механизме: движется ли Солнце вокруг Земли или вращается сама Земля.^{[6] [7] [8] [1]}
- В античности и Средневековье почти все считали, что вращается небесная сфера; смена дня и ночи — это суточный ход Солнца вокруг неподвижной Земли.^[1]
- С установлением гелиоцентризма (Коперник, Галилей, Кеплер, XVII век) у образованных астрономов формируется современное объяснение: день и ночь — результат вращения Земли вокруг своей оси.^{[8] [2] [1]}

В учебной и популярной литературе XIX века это уже стандартное объяснение: Земля вертится вокруг оси за ~24 часа, освещая то одну, то другую сторону, поэтому возникает смена дня и ночи.^{[6] [8] [1]}

Вращение Земли вокруг своей оси

Вращение Земли вокруг оси (день и ночь)

- Уже античные греки обсуждали идею вращения Земли: её допускали, например, некоторые пифагорейцы и Аристарх Самосский (III в. до н. э.), но это была минорная точка зрения, не ставшая общепринятой.^[1]
- Господствующей оставалась модель неподвижной Земли (Аристотель, Птолемей) вплоть до Нового времени; день и ночь объясняли суточным вращением небесной сферы вокруг неподвижной Земли.^[1]
- После Коперника (1543) модель вращающейся Земли стала «естественной», но оставались серьёзные возражения: не было прямого физического доказательства, почему мы «не чувствуем» вращение.^[2]
- Первое знаменитое прямое экспериментальное подтверждение суточного вращения Земли — маятник Фуко (Париж, Пантеон, 1851), наглядно показывающий вращение плоскости колебаний относительно Земли.^[2]

По сути, с середины XVI века образованные астрономы «понимали» вращение Земли как часть гелиоцентризма, а с середины XIX века получили наглядное демонстрационное доказательство (маятник Фуко), после чего сомнения сошли на нет.^{[2] [1]}

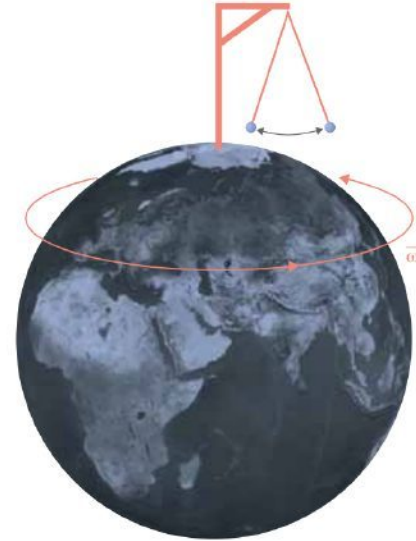
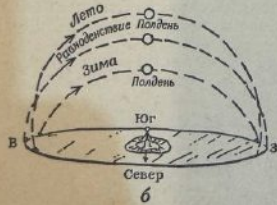
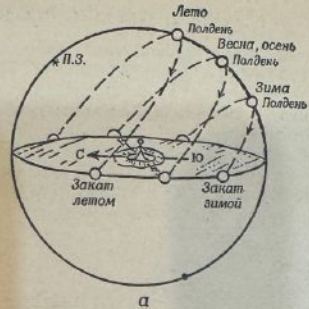


Рис. 1.30. Маятник Фуко — иллюстрация силы Кориолиса

Положение Солнца на горизонте



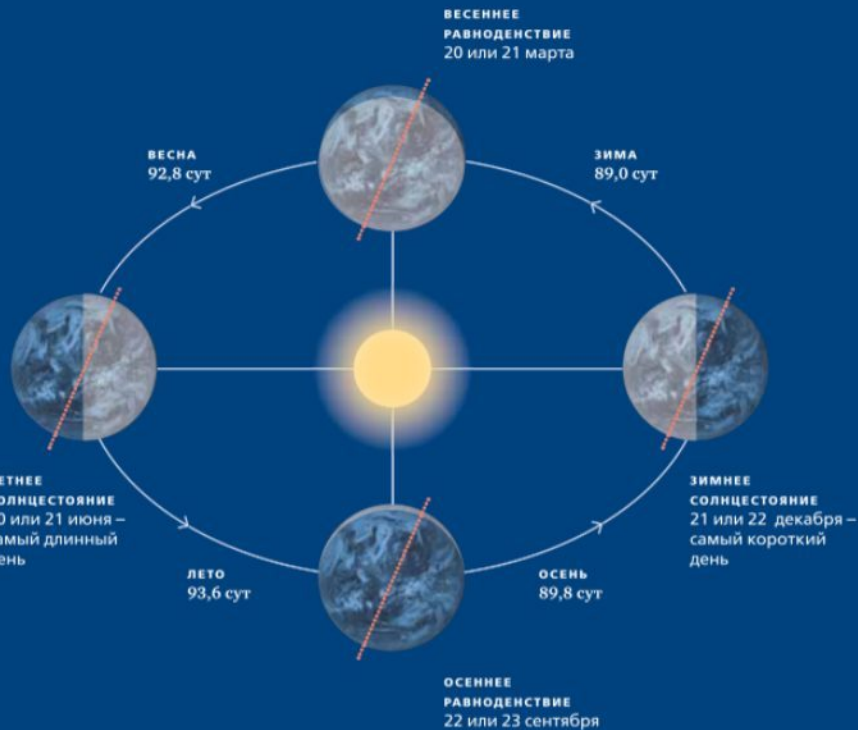
Фиг. 2. Путь Солнца по небосводу изменяется в зависимости от времени года.

Понимание причин времён года

- Наблюдательный факт: Солнце в разное время года поднимается на разную высоту и проходит по небу по разным дугам, что связано с его видимым годовым движением по эклиптике; это было хорошо известно ещё в Вавилоне и Греции. ^[4]
- Уже древние астрономы понимали геометрически: плоскость годового пути Солнца (эклиптика) наклонена к небесному экватору, поэтому меняется высота Солнца в полдень и длина дня — отсюда смена сезонов. ^[4]
- В геоцентрической терминологии это формулировалось как наклон эклиптики к экватору; в гелиоцентрической — как наклон оси вращения Земли к плоскости её орбиты вокруг Солнца. ^{[3] [4]}
- Современное краткое объяснение сформировалось к XVII-XVIII векам: времена года возникают не потому, что Земля «то ближе, то дальше» от Солнца, а из-за наклона оси и годового движения Земли по орбите, что меняет угол падения солнечных лучей и продолжительность дня. ^{[9] [10] [6] [3] [4]}

Таким образом, геометрическую суть смены времён года (наклон экватора/оси к эклиптике и годовое движение) астрономы понимали уже в античности, а в современном виде («наклон оси Земли + обращение вокруг Солнца») — с окончательным утверждением гелиоцентризма в XVII веке. ^{[3] [4]}

Смена времен года



Наклон оси к плоскости эклиптики

- Количественно наклон оси (около $23,4^\circ$ к плоскости орбиты) определили уже в античной астрономии: достаточно измерить высоту Солнца в день солнцестояния в разных широтах. [3] [4]
- В геоцентрической картине Птолемея уже присутствует наклон небесного экватора к эклиптике, то есть геометрически всё то же самое: наклон оси мира к плоскости годового пути Солнца. [4]
- В новоевропейской астрономии это переинтерпретировали как наклон оси вращающейся Земли к своей орбите вокруг Солнца; численное значение угла уточнили в XVII–XVIII вв., а современное точное значение порядка $23,44^\circ$ — результат высокоточной астрометрии и теории прецессии. [5] [3] [4]

То есть сам факт наклона экватора к эклиптике известен как минимум со времён эллинистической астрономии; интерпретация «наклонена ось Земли» закрепляется вместе с принятием гелиоцентризма в XVI–XVII вв. [4]

1. <https://мы-гимназисты.рф/index.php/pochemu-tak-byvaet/2171-pochemu-byvaet-den-i-noch>
2. <https://www.youtube.com/watch?v=Tm2JaFqBrSU>
3. <https://school16kusch.narod.ru/uchitelay/shelest/dvigenie.doc>
4. <https://www.astronet.ru/db/msg/1175352/node7.html>
5. <https://www.facebook.com/naukatv/videos/траектория-движения-земли-вокруг-солнца/1415846261797774/>
6. <https://chudo-udo.info/enciklopediya-dlya-detey/vse-obo-vsem/3476-kak-i-pochemu-menyayutsya-vremena-goda>
7. <https://ulposuda.ru/tips/osnovnye-prichiny-smeny-dnya-i-nochi-pochemu-den-i-noch-smenyayut/>
8. <https://oblakoz.ru/conspect/336771/Smena-dnya-i-nochi-na-Zemle-kak-rezul-tat-vrashheniya-planety-vokrug-svoej-osi>
9. <https://www.youtube.com/watch?v=88JvsJI9uZA>

Как определяли долготу местности

Страны горизонта по карманным часам

Способ находить в солнечный день страны горизонта по карманным часам общеизвестен. Циферблат располагают так, чтобы часовая стрелка была направлена на Солнце. Угол между этой стрелкой и линией VI—XII делят пополам: равноделящая укажет тогда направление на юг. Нетрудно понять основание этого способа. Солнце в суточном движении обходит небо в 24 часа, часовая же стрелка обходит циферблат в 12 часов, т. е. описывает в одинаковое время вдвое большую дугу. Значит, если в полдень часовая стрелка указывала на Солнце, то спустя некоторое время она опередит его, описав своим концом

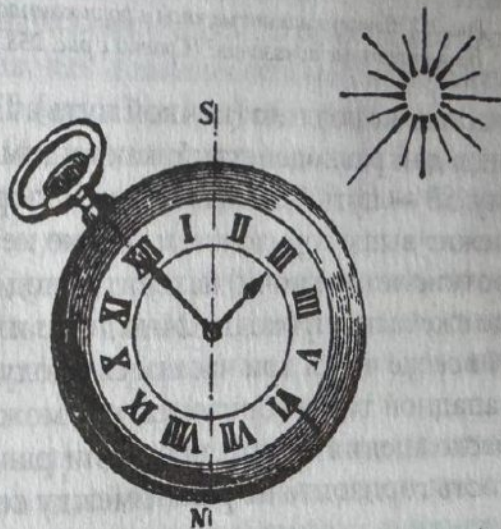


Рис. 256. Простой, но неточный прием определения стран света с помощью карманных часов.

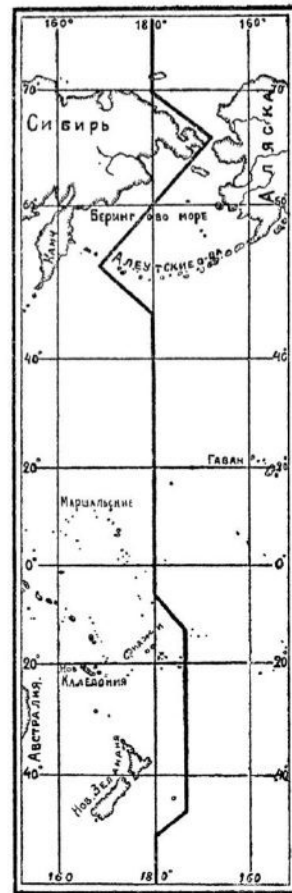


Рис. 11. Граница дат. Проходя ее (на кораблях), прибавляют или убавляют одни сутки.

С помощью часов (хронометров) можно определять и долготу

Как команда Магеллана потеряла сутки?

Команда Магеллана «потеряла» сутки из-за кругосветного плавания на запад.

Когда они вернулись, их корабельный счёт дней отстал на 1 день от местного календаря.

Причина в том, что, двигаясь на запад, они как бы всё время «догоняли» Солнце:

- каждый следующий полдень наступал для них чуть позже,
- за полный оборот вокруг Земли эта разница накопилась в целые сутки.

Иначе говоря:

$$360^{\circ} \div 15^{\circ} = 24 \text{ часа}$$

Земля поворачивается на 15° в час, и при полном обходе вокруг Земли смещение по времени даёт 24 часа, то есть одни сутки.

Проще говоря

- если обогнуть Землю на **запад**, то по своим наблюдениям «теряешь» сутки;
- если на **восток** — наоборот, «приобретаешь».

Именно такие случаи позже привели к необходимости международной линии перемены дат.

Совершил первое кругосветное путешествие. Экспедиция началась 20 сентября 1519 года на 5 судах, без карт. Высадились для пополнения запасов в Рио-де-Жанейро, обследовали берега Бразилии и Аргентины. В антарктических широтах на корабле произошел мятеж, но Магеллан смог его подавить. Через пролив (впоследствии названным Магеллановым) корабли попали в Тихий океан, Филиппинский архипелаг, где погиб Магеллан. Команда продолжала движение на запад и в Испанию вернулись только 2 корабля.



Как определяли широту местности

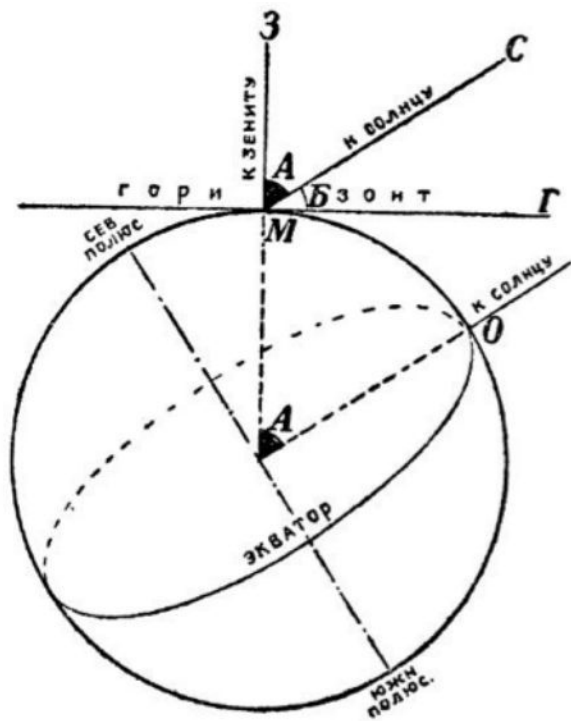


Рис. 15. Как мореплаватели определяют широту места.

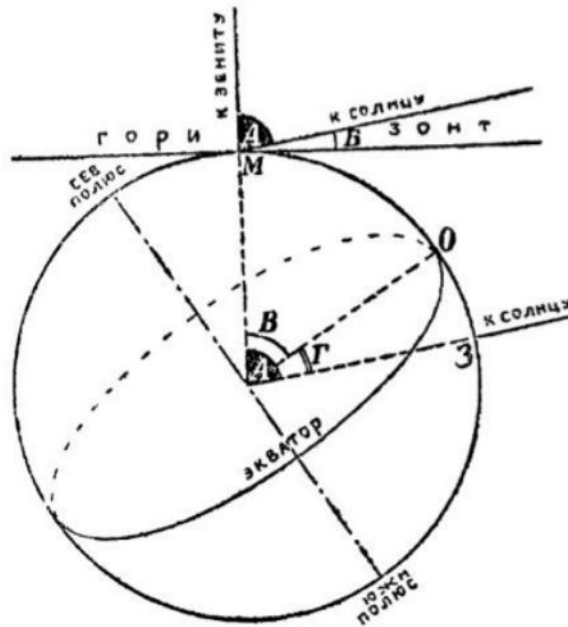
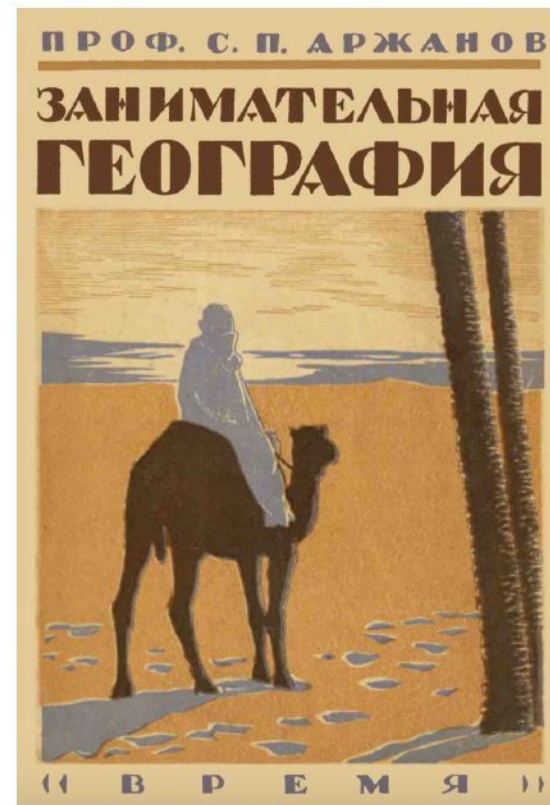


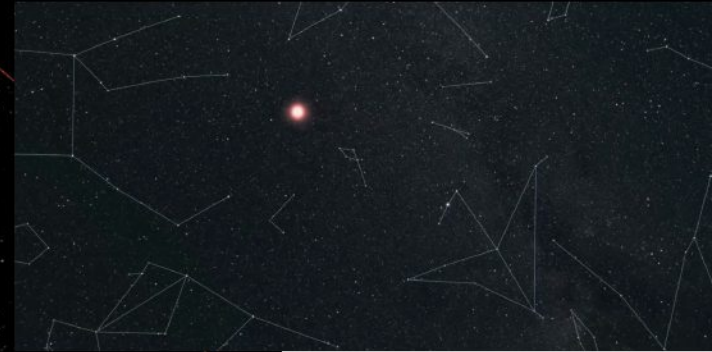
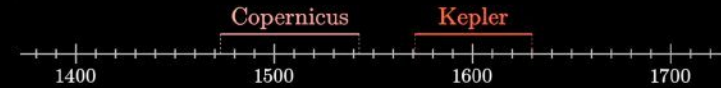
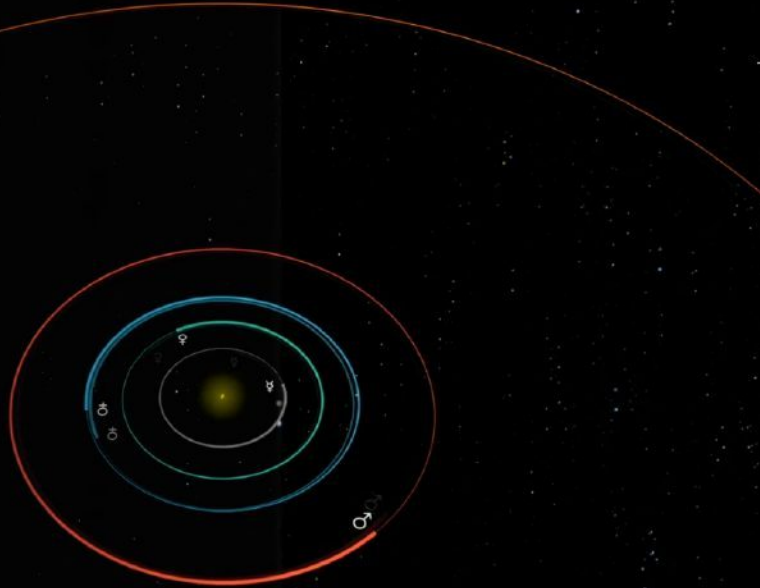
Рис. 16. Способ определения широты при других условиях.



Гелиоцентрическая модель Коперника

Copernicus

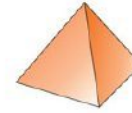
- proposed the planets go around the Sun
- assumed orbits were circular
- calculated all the orbital periods
 - Mercury: 88 days
 - Venus: 225 days
 - Earth: 365 days
 - Mars: 687 days
 - Jupiter: 4,333 days
 - Saturn: 10,755 days



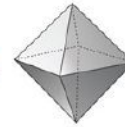
24

Платоновская модель Кеплер

ПЛАТОНОВЫ ТЕЛА



ТЕТРАЭДР



ОКТАЭДР



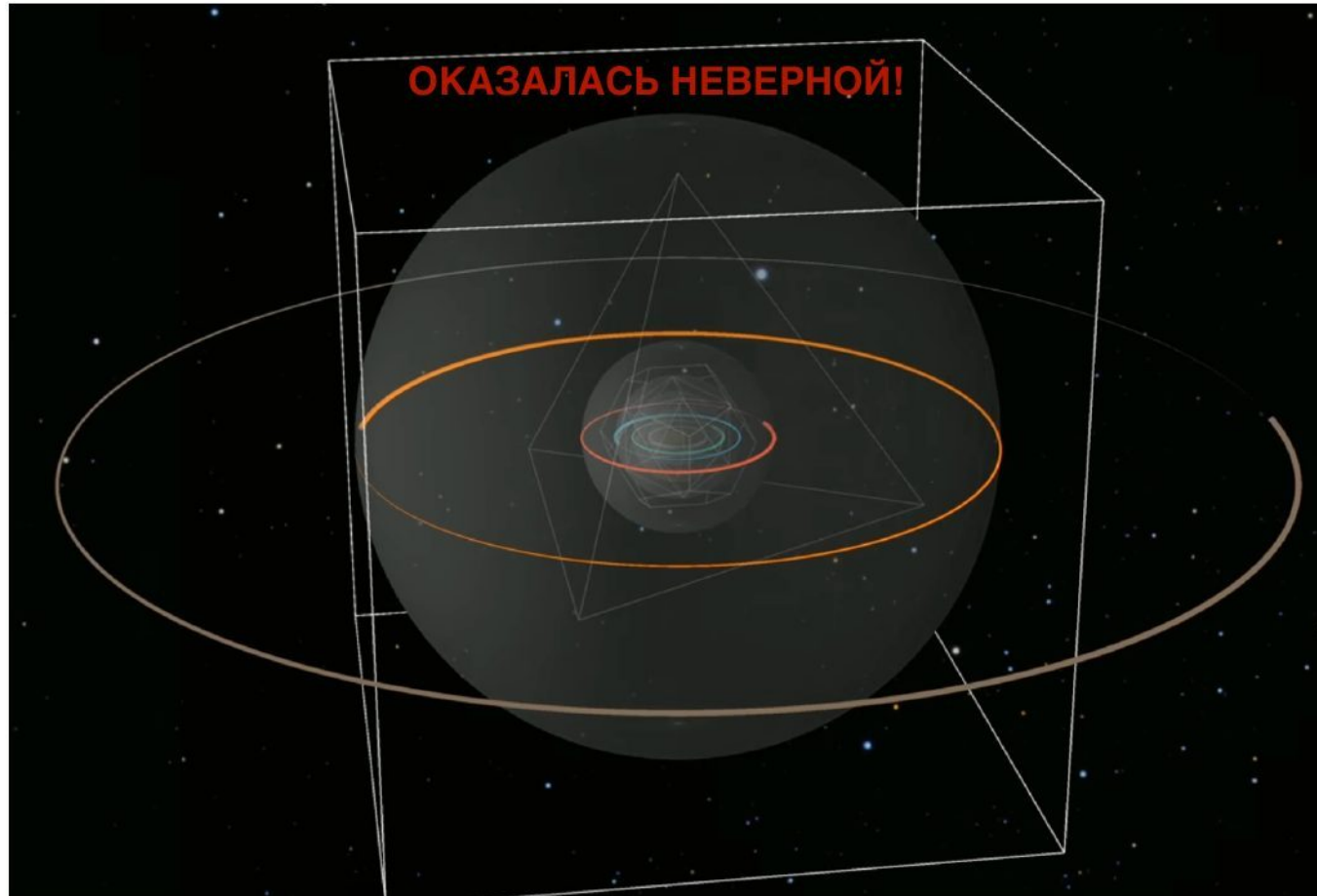
ИКОСАЭДР



КУБ



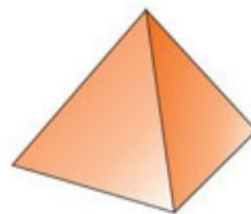
ДОДЕКАЭДР



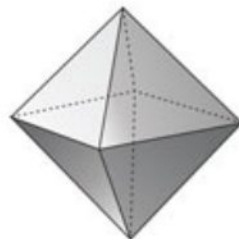
Платоновская модель Кеплер

ПЛАТОНОВЫ ТЕЛА

$$V - R + G = 2,$$



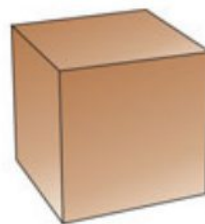
ТЕТРАЭДР



ОКТАЭДР



ИКОСАЭДР



КУБ



ДОДЕКАЭДР

$$\left(\frac{2}{K} - 1 + \frac{2}{N}\right)R = 2.$$

Все возможные решения легко определяются прямым перебором⁴⁾, который дает (см. рис. 9, 10):

$K = 3, N = 3$ – тетраэдр,

$K = 3, N = 4$ – куб,

$K = 3, N = 5$ – додекаэдр,

$K = 4, N = 3$ – октаэдр,

$K = 5, N = 3$ – икосаэдр.

Обратимся теперь к случаю правильного многогранника, который характеризуется тем, что в каждой вершине сходится одно и то же число K ребер и одно и то же число N ребер ограничивает каждую

$$N \cdot G = 2R, \quad K \cdot V = 2R,$$

Перебор сводится к определению целочисленных решений неравенства

$$\frac{2}{K} + \frac{2}{N} > 1$$

при очевидном ограничении $K, N > 2$.

Эксперименты Т. Браге

После смерти Браге Кеплер получил доступ к его наблюдениям, особенно к данным по Марсу. Кеплер пытался подогнать их под традиционные схемы:

- круговые орбиты,
- равномерное движение,
- эпициклы.

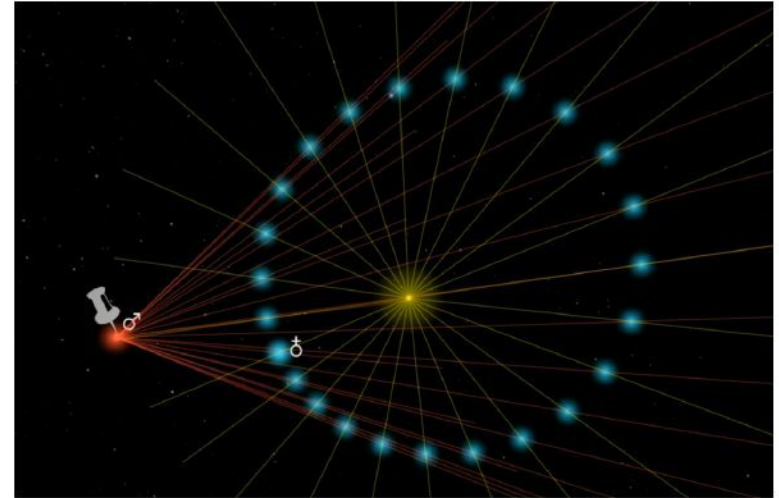
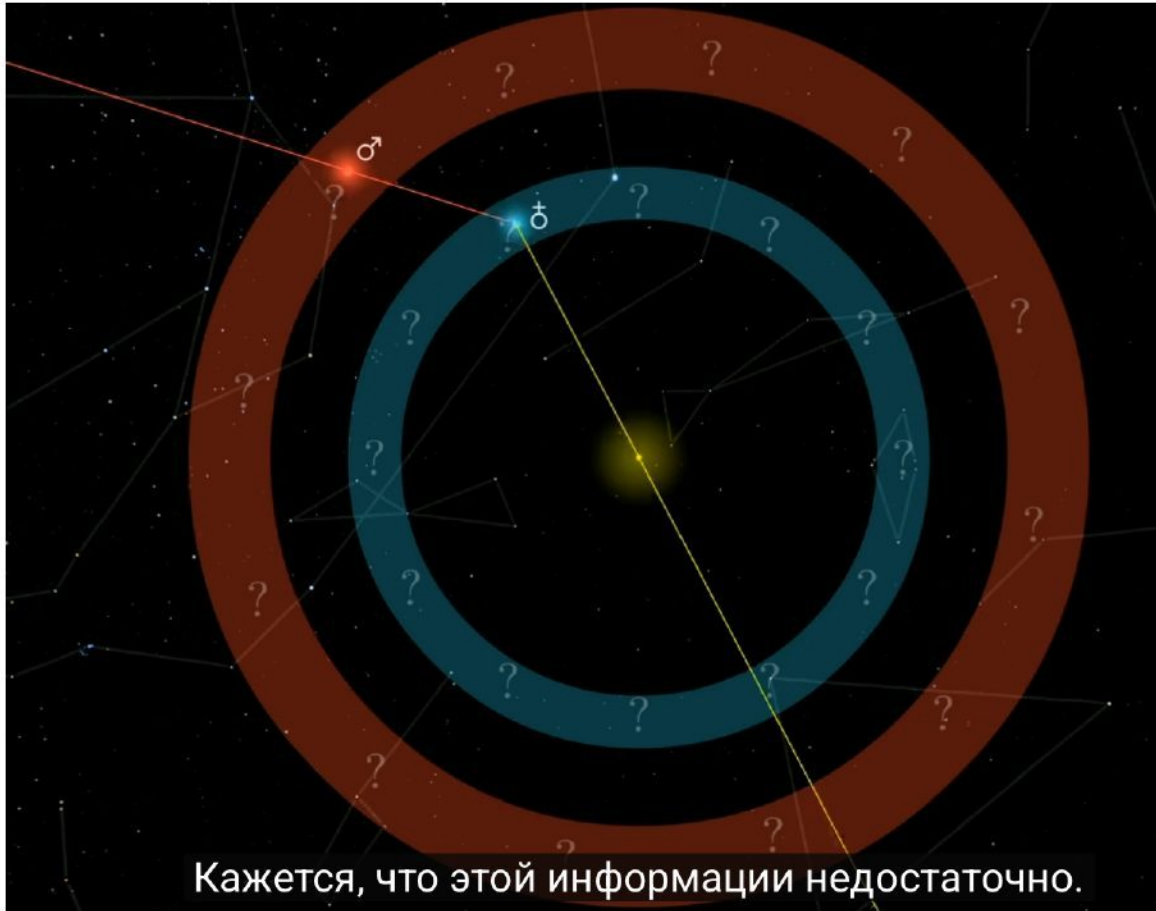
Но данные Браге были **слишком точны**, чтобы неточности можно было скрыть. Кеплер обнаружил расхождение примерно в **8 угловых минут** — и решил, что это не ошибка наблюдений, а признак неправильности самой теории.

Его знаменитая мысль по сути была такой: лучше отказаться от старой космологической схемы, чем игнорировать эти 8 минут.



Рассуждения Кеплера

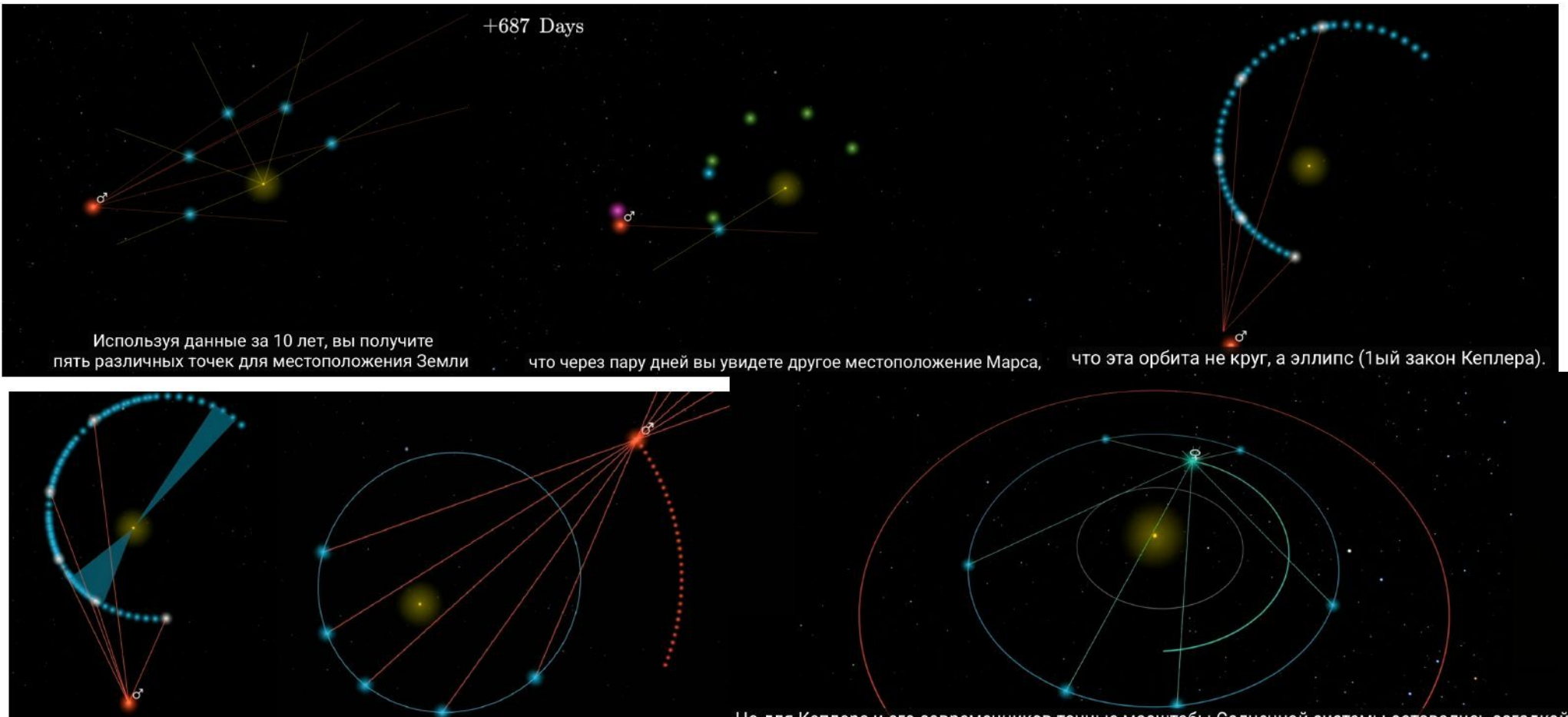
Идея — зафиксировать Марс



Если есть два зафиксированных объекта (Солнце и Марс), то мы можем вычислить траекторию Земли
Но согласно наблюдениям Коперника, Марс каждые 687 дней возвращается в исходное положение!
Наблюдая 10 лет за положением Марса с таким периодом (Браге) можно восстановить траекторию Земли!

Рассуждения Кеплера

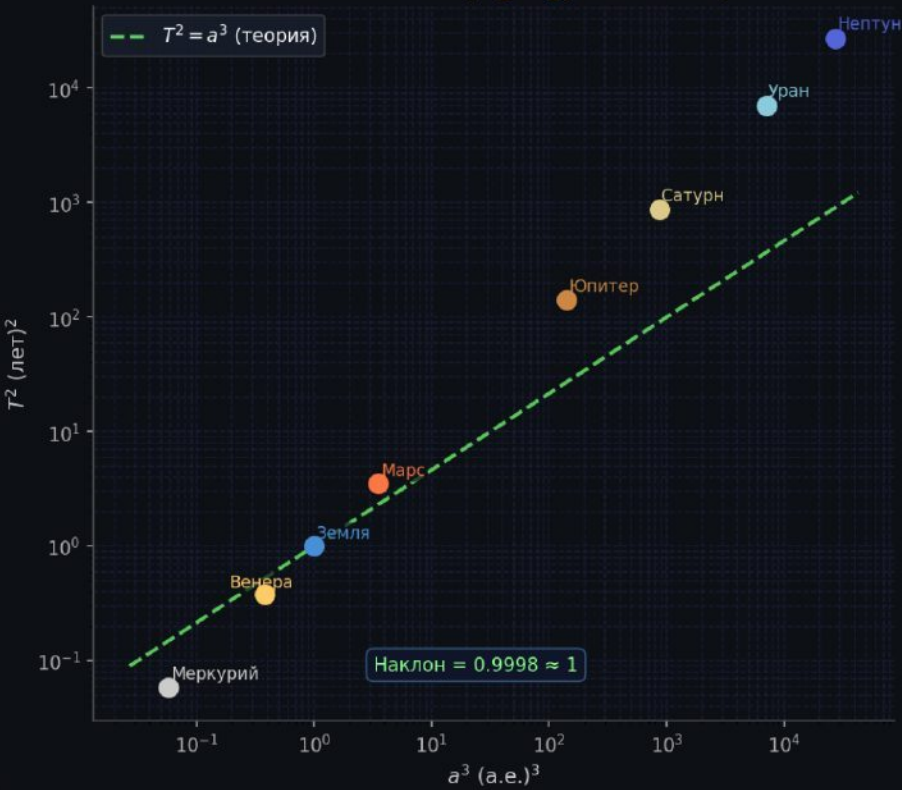
При работе с данными Коперника и Браге, Кеплер фактически создает теорию анализа данных



Рассуждения Кеплера

Третий закон Кеплера: единое соотношение для всех планет Солнечной системы

III закон: $T^2 \propto a^3$ (log-log, наклон = 1)



Вывод: $T^2/a^3 = 4\pi^2/(GM_{\odot}) = \text{const}$

Планета	а (а.е.)	Т (лет)	T^2/a^3
Меркурий	0.387	0.241	1.0021
Венера	0.723	0.615	1.0008
Земля	1.000	1.000	1.0000
Марс	1.524	1.881	0.9996
Юпитер	5.203	11.860	0.9986
Сатурн	9.537	29.460	1.0005
Уран	19.190	84.010	0.9987
Нептун	30.070	164.800	0.9989

Площадь эллипса: $S = \pi ab$

II закон: $\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$

За период T : $S = \frac{L}{2m} \cdot T$

$\Rightarrow T = \frac{2\pi mab}{L}$

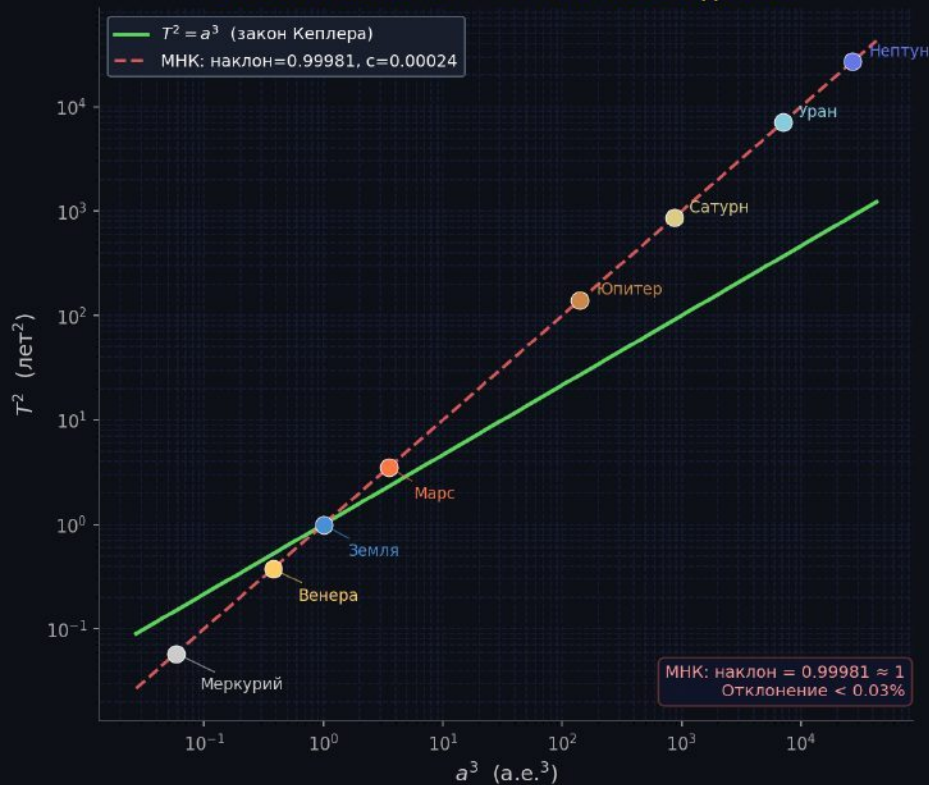
I закон: $p = b^2/a$, $L = m\sqrt{\mu p}$

$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu}$

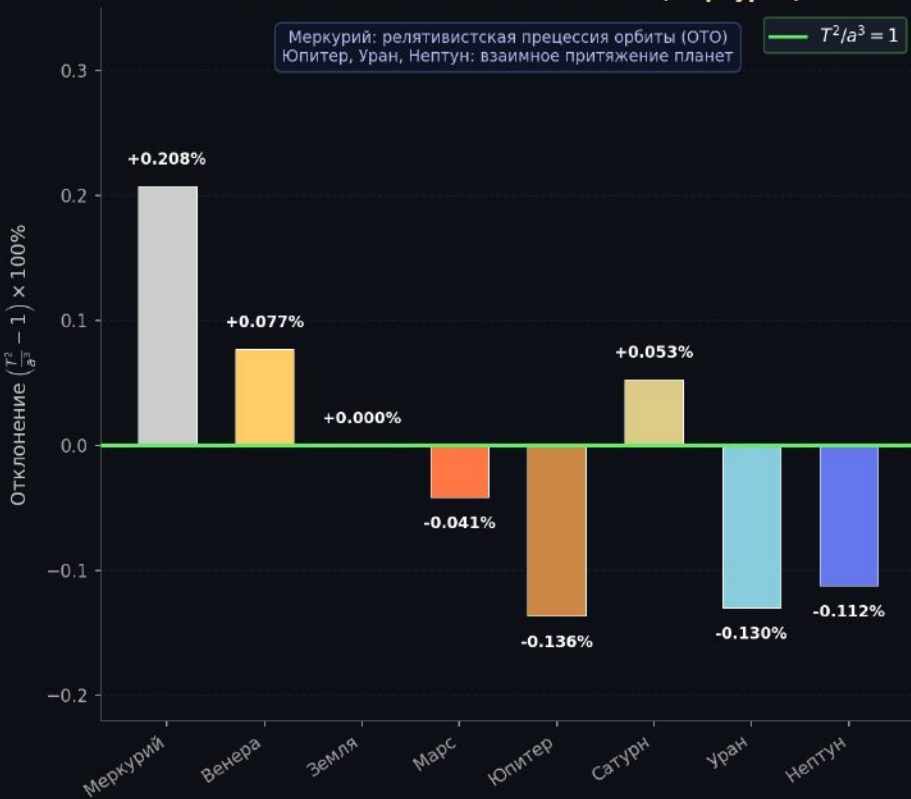
$\mu = GM_{\odot} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}}$

Рассуждения Кеплера

III закон Кеплера: данные планет согласуются с $T^2 = a^3$ с точностью до 0.2% — МНК и теоретическая прямая практически совпадают
Log-log: данные планет vs теория
Все точки лежат на $T^2 = a^3$ с точностью до 0.2%



Максимальное отклонение $\approx 0.21\%$ (Меркурий)



Законы Кеплера

Как из этого выросли законы Кеплера

Используя наблюдения Браге, Кеплер вывел:

1. **Первый закон:** планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце.
2. **Второй закон:** радиус-вектор планеты заметает равные площади за равные времена.
3. **Третий закон:** квадраты периодов обращения относятся как кубы больших полуосей.

Первые два закона были опубликованы в **1609 году** в книге *Astronomia Nova* и опирались прежде всего на данные по Марсу. Третий закон появился позже, в **1619 году**.

Кеплер, мог рассчитать расстояния до планет от Солнца, но только при условии, что известно расстояние от Земли до Солнца. Но оценка Аристарха была слишком грубой.

$$\frac{a_1^3}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{T_2^2} = \text{const}$$

Это даёт все расстояния в **единицах а.е.**, но не в абсолютных величинах.

Законы Кеплера

Обоснование второго закона Кеплера

Рассмотрим планету массой m , которая движется в поле силы тяжести Солнца, расположенного в точке O . Влияние на движение планеты других небесных тел учитывать не будем.

Скорость планеты обозначим $\vec{v}$, тогда её импульс равен $\vec{P} = m\vec{v}$ и направлен по касательной к траектории планеты (рис. 1.11).

Поместим начало координат в точку O и опустим из неё перпендикуляр на прямую, определяемую вектором $\vec{P}$. Длину этого

перпендикуляра обозначим ρ . Моментом импульса называется произведение

$$L = \rho P = \rho mv.$$

Момент силы тяжести относительно начала координат равен нулю, поэтому момент импульса планеты относительно Солнца не изменяется при её движении. За время Δt планета проходит по орбите расстояние $v\Delta t$. Рассмотрим заштрихованный треугольник с основанием $v\Delta t$ (см. рис. 1.11). Его площадь

$$\Delta S = \frac{1}{2} v\Delta t \rho = \frac{1}{2} \frac{L\Delta t}{m}.$$

Если время Δt мало, то основание треугольника практически совпадает с участком траектории, который проходит планета. Сам треугольник при этом — это участок площади, который заметает радиус-вектор $\vec{R}$ планеты за время Δt . Так как момент импульса постоянен во времени, то заметаемая площадь пропорциональна интервалу времени Δt , т. е. за равные промежутки времени радиус-вектор планеты будет заметать равные площади. Это и есть второй закон Кеплера.

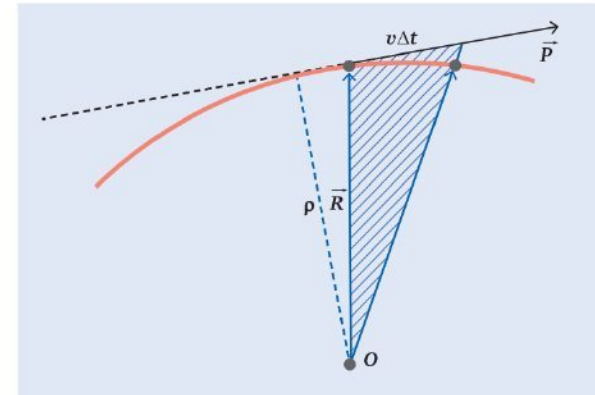


Рис. 1.11

Этап	Что произошло
Браге, 1576–1601	8000 наблюдений, точность 1–2'
Кеплер получает архив, 1601	Начинает вычисления орбиты Марса
Расхождение $\delta = 8'$	Коперниковская окружность не проходит через точки Браге
Кеплер, 1605	Орбита Марса — эллипс (I и II законы, <i>Astronomia Nova</i> 1609)
Кеплер, 1619	$T^2/a^3 = \text{const}$ (<i>Harmonices Mundi</i>)
Ньютон, 1687	Из I–III законов выводит $F \propto r^{-2}$ (<i>Principia</i>)

Закон всемирного тяготения Ньютона—Гука

Связь третьего закона Кеплера с законом всемирного тяготения

Из третьего закона Кеплера Ньютон вывел закон всемирного тяготения. Попробуем проследить за ходом рассуждений учёного.

Пусть есть несколько планет, совершающих движение вокруг звезды, причём для простоты будем считать это движение круговым. Обозначим радиусы планетных орбит R_1, R_2 и т. д., а периоды их обращения вокруг звезды T_1, T_2 и т. д. Тогда из третьего закона Кеплера следует, что

$$\frac{R_1^3}{T_1^2} = \frac{R_2^3}{T_2^2} = \dots = \text{const.}$$

Введя угловую скорость планет $\omega = \frac{2\pi}{T}$, последнее соотношение можно записать так: $\omega_1^2 R_1^3 = \omega_2^2 R_2^3 = \dots = \text{const.}$

Ньютон предположил, что сила взаимодействия планеты со звездой — степенная

функция расстояния между ними, т. е. имеет вид $F = AR^n$.

Тогда ускорение, которое планета получает, взаимодействуя со звездой, пропорционально расстоянию в той же степени: $a = BR^n$.

Ньютон знал, что при движении по окружности центростремительное ускорение пропорционально квадрату скорости и обратно пропорционально расстоянию, т. е.

$$a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \Rightarrow \omega^2 = BR^{n-1}.$$

В силу третьего закона Кеплера произведение $\omega^2 R^3$ должно быть постоянной величиной, т. е. не зависит от расстояния. С другой стороны, $\omega^2 R^3 = BR^{n+2}$, откуда видно, что требуемое условие выполняется в случае $n = -2$. В этом случае $\omega^2 R^3 = B$. Ньютон предположил также, что постоянная

В письме от 6 января 1680 года Ньютону Гук впервые ясно сформулировал закон всемирного тяготения, предположив, что сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Он предложил Ньютону, как математически более компетентному исследователю, строго математически обосновать эту гипотезу, показав связь с первым законом Кеплера для некруговых орбит.



Роберт Гук

Закон всемирного тяготения Ньютона—Гука

величина B пропорциональна массе звезды M : $B = GM$. Тогда для ускорения получаем:

$$a = G \frac{M}{R^2}.$$

А сила, которая сообщает такое ускорение планете массой m , будет равна

$$F = G \frac{Mm}{R^2}.$$

Это и есть закон всемирного тяготения. Заслуга Ньютона заключается не столько в том, что он нашёл выражение для силы гравитационного притяжения, сколько в том, что он предположил универсальный характер этого закона.

Интересен вывод и самого третьего закона Кеплера.

Найдём время полного обращения планеты вокруг Солнца — период обращения T .

По второму закону Кеплера за время Δt радиус-вектор планеты заметает площадь $S = \Delta t \frac{L}{2m}$. Это означает, что период обращения можно вычислить, разделив площадь эллипса на скорость заметания: $T = \frac{S}{\frac{L}{2m}}$.

Площадь эллипса равна $S = \pi ab$, где b — его малая полуось. Тогда $T = \frac{2\pi abm}{L}$.

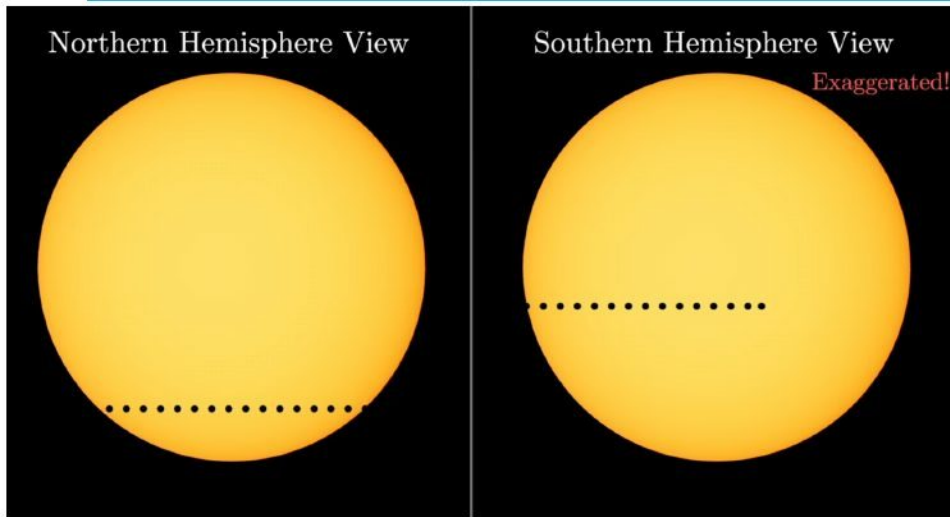
Из законов сохранения энергии и импульса можно получить соотношение $b = \frac{L}{\sqrt{2mE}}$, тогда $T = \pi a \sqrt{\frac{2m}{E}}$. Выразив энергию через большую полуось a $\left(E = \frac{GmM}{2a} \right)$, получим:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}}.$$



Исаак Ньютон

Опыт Галлея



5b. Абсолютный масштаб — транзит Венеры

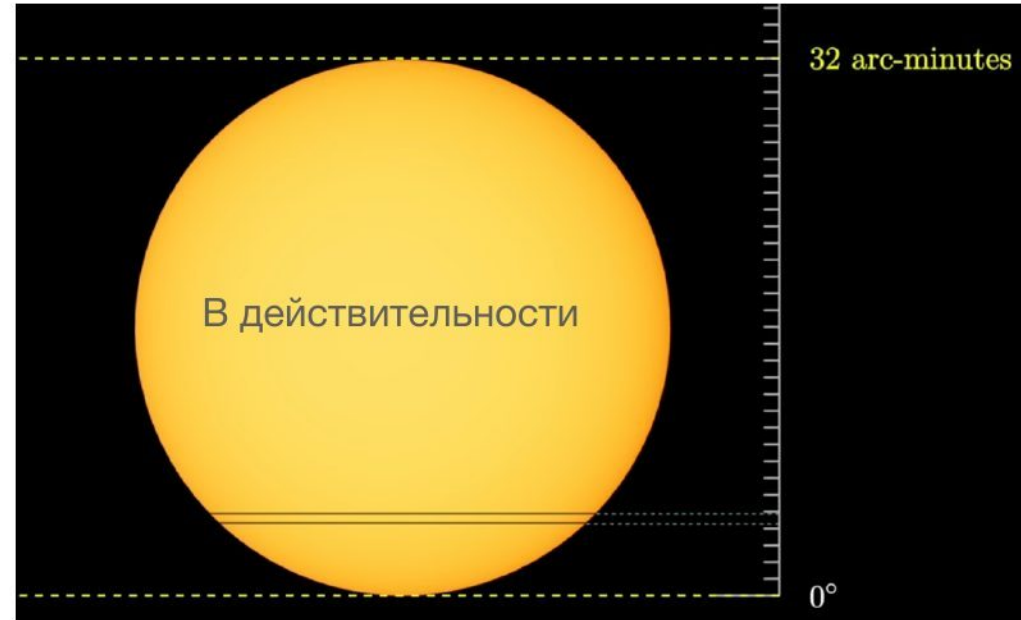
Проблема: нужно перевести а.е. в километры. **Эдмунд Галлей (1716)** предложил метод:

Во время **прохождения Венеры по диску Солнца** наблюдатели в разных точках Земли видят разные хорды. Из **параллакса** (разницы наблюдаемых траекторий) вычисляется расстояние до Венеры, а значит и 1 а.е.

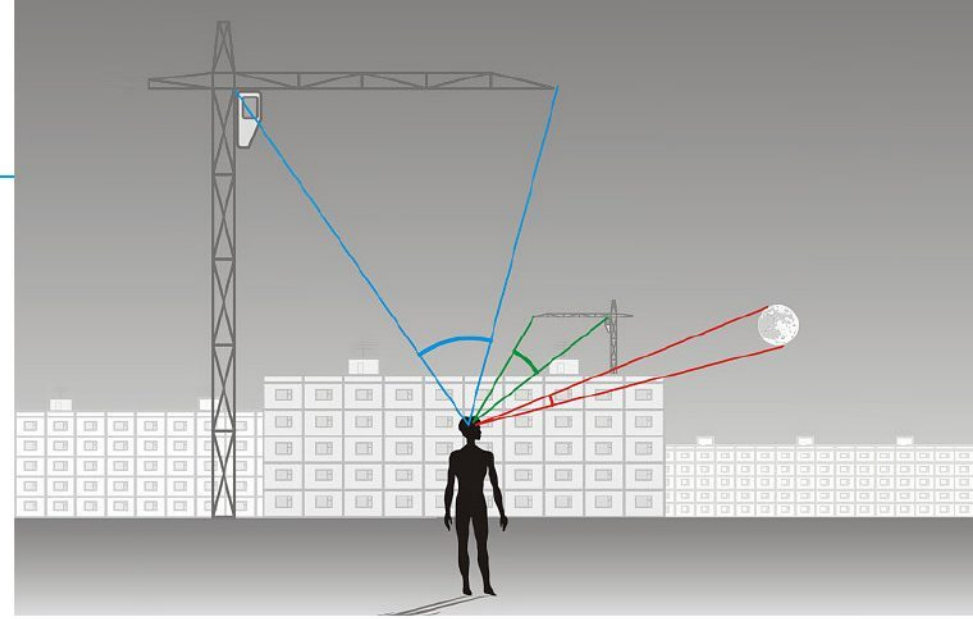
Экспедиции **1761 и 1769 гг.** (в том числе Кук на Таити) дали:

1 а.е. $\approx$ 149–153 млн км

(Современное значение: 149.6 млн км.)



Размеры планет



5с. Размеры планет

Зная расстояние D до планеты и измерив её **угловой диаметр** θ в телескоп:

$$d = D \cdot \theta_{\text{рад}}$$

Так были определены диаметры всех планет, видимых в телескоп.

Массы планет

Для планет со спутниками — из **третьего закона Кеплера** для системы планета–спутник:

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}$$

где a и T — большая полуось и период спутника. Так Ньютон и его последователи определили массы Юпитера, Сатурна и т.д.

Резюме

Резюме цепочки измерений

Вся конструкция — это **лестница расстояний**, где каждая ступень опирается на предыдущую:

1. **Тень + геометрия** → Земля — шар
2. **Два города + угол Солнца** → радиус Земли $R_{\oplus}$
3. **Лунное затмение + параллакс** → $D_{\text{л}}$ и $d_{\text{л}}$ (в единицах $R_{\oplus}$)
4. **Квадратура Луны** → $D_{\odot}/D_{\text{л}}$ → расстояние до Солнца (грубо)
5. **Элонгации + Кеплер** → все расстояния в а.е.
6. **Транзит Венеры** → 1 а.е. в км → абсолютный масштаб всей системы
7. **Угловые размеры + расстояния** → диаметры планет
8. **Спутники + закон тяготения** → массы планет

Каждый шаг — чистая **геометрия + наблюдение**, никакой мистики. Именно это делает историю измерения Солнечной системы одним из величайших триумфов математического мышления.