

Пи-теорема в физике и математике

Александр Гасников (ректор университета Иннополис, проф. МФТИ)
gasnikov@yandex.ru

25 сентября, 2024

Теория подобия и размерностей

Задача 1 (о перекрытии реки). Пусть M обозначает массу камней, необходимых для перекрытия реки, если в единицу времени в реку засыпается масса m , характерный размер фиксированного профиля реки l , скорость течения v , ускорение свободного падения g , ρ – плотность воды. Докажите, что найдётся такая функция $\psi(\cdot, \cdot)$, что

$$M = m \sqrt{\frac{l}{g}} \psi\left(\frac{gl}{v^2}, \frac{m}{v\rho l^2}\right).$$



Задача 1 (о перекрытии реки). Пусть M обозначает массу камней, необходимых для перекрытия реки, если в единицу времени в реку засыпается масса m , характерный размер фиксированного профиля реки l , скорость течения v , ускорение свободного падения g , ρ – плотность воды. Докажите, что найдётся такая функция $\psi(\cdot, \cdot)$, что

$$M = m \sqrt{\frac{l}{g}} \psi\left(\frac{gl}{v^2}, \frac{m}{v\rho l^2}\right).$$

Указание. Всего есть три базисные безразмерные комбинации: $\frac{m}{M} \sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{gl}{v^2}$, $\frac{m}{v\rho l^2}$. Никаких других нет! Все остальные выражаются через эти три базисные. Действительно обозначим $сек = [1, 0, 0]$, $м = [0, 1, 0]$, $кг = [0, 0, 1]$. Тогда $M = [0, 0, 1]$, $m = [-1, 0, 1]$, $l = [0, 1, 0]$, $v = [-1, 1, 0]$, $g = [-2, 1, 1]$, $\rho = [0, -3, 1]$. Нужно найти все такие решения $\vec{\alpha}$ – вектор

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\alpha} = \vec{0}.$$

Указание. Всего есть три базисные безразмерные комбинации: $\frac{m}{M} \sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{gl}{v^2}$, $\frac{m}{v\rho l^2}$. Никаких других нет! Все остальные выражаются через эти три базисные. Действительно обозначим $сек = [1, 0, 0]$, $м = [0, 1, 0]$, $кг = [0, 0, 1]$. Тогда $M = [0, 0, 1]$, $m = [-1, 0, 1]$, $l = [0, 1, 0]$, $v = [-1, 1, 0]$, $g = [-2, 1, 1]$, $\rho = [0, -3, 1]$. Нужно найти все такие решения $\vec{\alpha}$ – вектор

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\alpha} = \vec{0}.$$

Несложно проверить, что фундаментальной матрицей этой системы будет

$$\begin{pmatrix} -1; & 0; & 0 \\ 1; & 0; & 1 \\ 0.5; & 1; & -2 \\ 0; & -2; & -1 \\ -0.5; & 1; & 0 \\ 0; & 0; & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и следует базисность трех найденных безразмерных комбинаций.

Указание. Всего есть три базисные безразмерные комбинации: $\frac{m}{M} \sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{gl}{v^2}$, $\frac{m}{v\rho l^2}$. Никаких дру-

гих нет! Все остальные выражаются через эти три базисные. Действительно обозначим $сек = [1, 0, 0]$, $м = [0, 1, 0]$, $кг = [0, 0, 1]$. Тогда $M = [0, 0, 1]$, $m = [-1, 0, 1]$, $l = [0, 1, 0]$, $v = [-1, 1, 0]$, $g = [-2, 1, 1]$, $\rho = [0, -3, 1]$. Нужно найти все такие решения $\vec{\alpha}$ – вектор

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{\alpha} = \vec{0}.$$

Поэтому по основной теореме теории размерностей (П – теорема) найдётся такая функция $\varphi(\cdot, \cdot)$, что

$$\frac{m}{M} \sqrt{\frac{l}{g}} = \varphi\left(\frac{gl}{v^2}, \frac{m}{v\rho l^2}\right) \Rightarrow M = m \sqrt{\frac{l}{g}} \psi\left(\frac{gl}{v^2}, \frac{m}{v\rho l^2}\right), \text{ где } \psi(\cdot, \cdot) = \varphi(\cdot, \cdot)^{-1}.$$

Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания. М. МЦНМО, 2008, стр. 16.
Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.

Приложения в биофизике

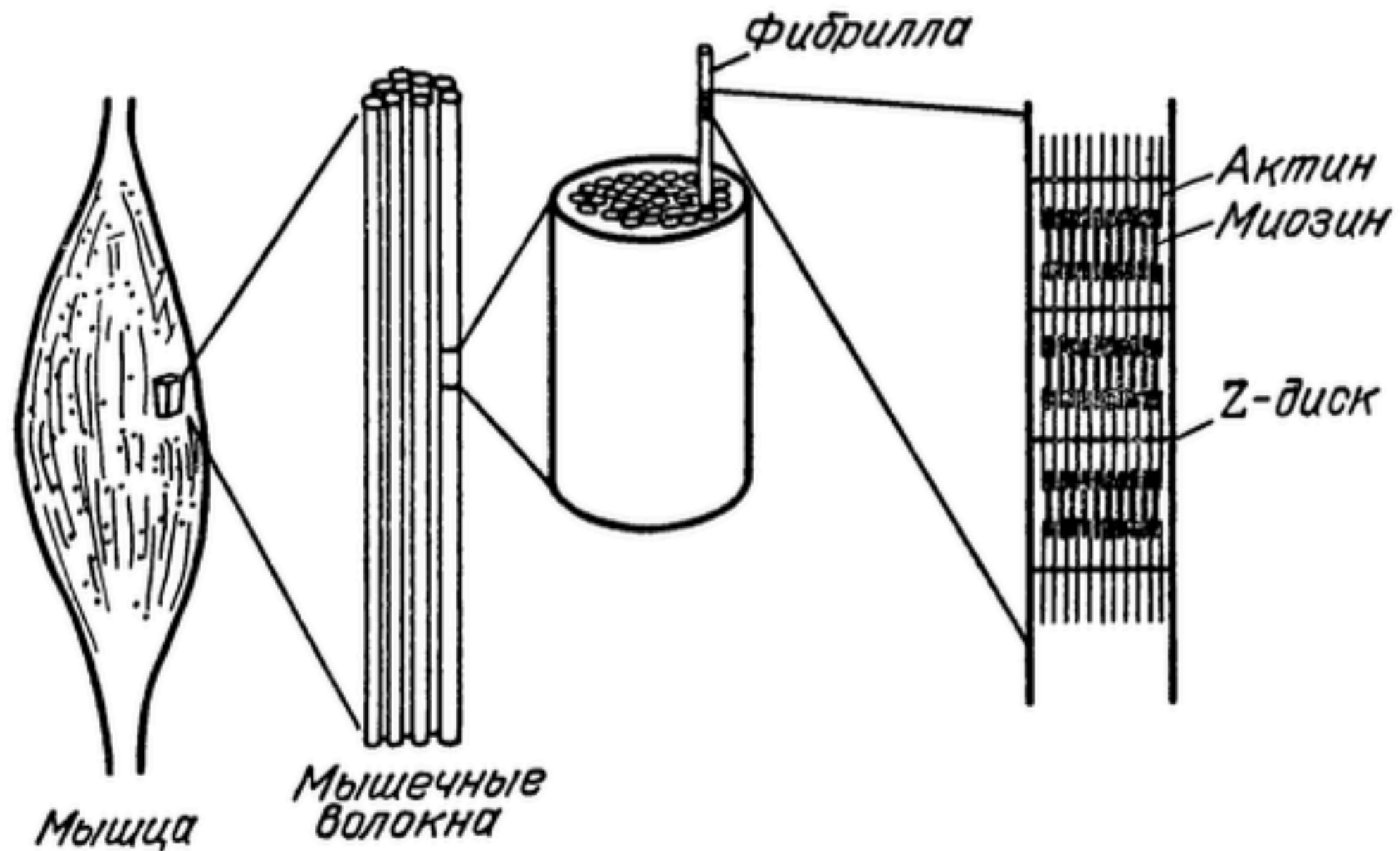


Рис. 70. Структура скелетной мышцы

Почему кузнечик и человек одинаково прыгают

Предположим теперь, что мы располагаем группой животных, подобных во всех отношениях и отличающихся друг от друга только своей массой (см. рис. 71). Пусть масса одного из этих животных M , а масса мышцы, сокращение которой приводит тело в движение, CM , где C — постоянная для всей этой группы животных. Если единица массы мышцы способна выполнить работу a , то работа, выполняемая всей мышцей,

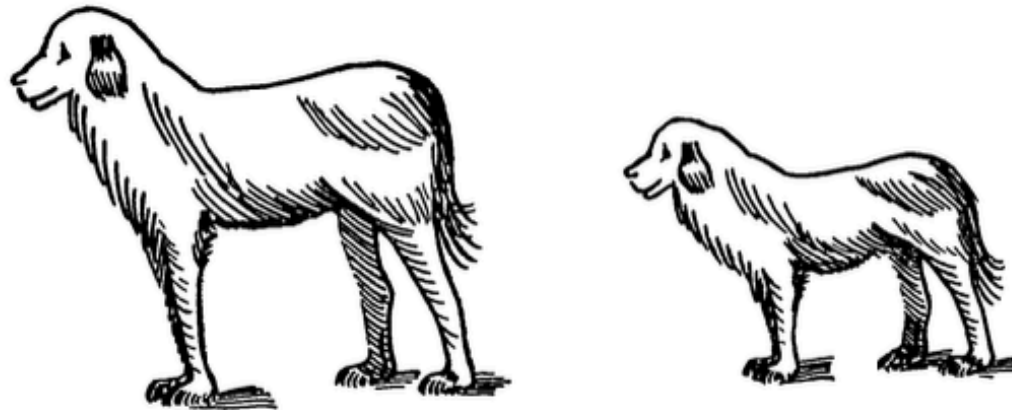


Рис. 71 Подобные животные

равна aCM . Пусть эта работа идет на то, чтобы придать скорость v части тела с массой C_1M , где C_1 — другая постоянная для той же группы животных. Очевидно, что для придания скорости v массе C_1M необходимо затратить энергию $C_1Mv^2/2$. Приравнявая эту энергию работе, совершенной мышцей, получаем

$$\frac{C_1Mv^2}{2} = aCM,$$

откуда

$$v = \sqrt{2aC/C_1}. \quad (32)$$

Почему кузнечик и человек одинаково прыгают

$$\frac{C_1 M v^2}{2} = a C M,$$

откуда

$$v = \sqrt{2aC/C_1}. \quad (32)$$

Из выражения (32) следует, что подобные животные могут ускорять соответствующие части своих тел до одинаковых скоростей независимо от их масс. Применим это заключение к ногам животного: аналогичные животные могли бы ускорять свои конечности до одинаковых скоростей и, следовательно, бежать с одинаковой скоростью независимо от их размеров. Однако длина шага у каждого из этой группы подобных животных пропорциональна его линейным размерам, т. е. $\sqrt[3]{M}$. Поэтому частота шагов подобных животных, движущихся с одинаковой скоростью, должна быть прямо пропорциональна $(\sqrt[3]{M})^{-1}$. Конечно, такие количественные оценки нельзя в полной мере применять в сравнительном анализе движений мыши и слона хотя бы потому, что формы их тел далеки от подобия. В то же время приведенные рассуждения позволяют во многих случаях качественно объяснить связь между массой животного и образом его жизни.

Приложения в биофизике

Задача 2 (почему щука всегда догонит карася?). Найти отношение скоростей v_1/v_2 , которые могут развивать две подобные рыбы (разных размеров), если отношение их характерных линейных размеров l_1/l_2 .

Указание. Мощность, которую развивает рыба, в основном идет на преодоление работы силы сопротивления воды. Поскольку сама сила пропорциональна $F \sim Sv^2$ (скорость считаем довольно большой), то мощность $N \sim Sv^3 \sim l^2 v^3$. С другой стороны, хорошо известно, что сила создаваемая мышцей напрямую зависит от её площади, следовательно, вырабатываемая мощность прямо пропорциональна объему мышцы. Таким образом, $N \sim V \sim l^3$. Следовательно, $v_1/v_2 = \sqrt[3]{l_1/l_2}$.

Постарайтесь на таком же уровне грубости объяснить, почему частота шагов подобных животных, движущихся с одинаковой скоростью пропорциональна $M^{-1/3}$, почему одинаковые по форме животные подпрыгивают на одинаковую высоту, почему зависимость между массой подобных животных и массой потребляемого ими кислорода в единицу времени Q имеет вид $Q \sim M^{2/3}$.

Богданов К.Ю. Физика в гостях у биолога. М.: Б-ка Квант, вып. 49. 1986.

Bogdanov Konstantin Biology in physics. Is life matter? Academic Press, 2000.

Физика и ... М.: Б-ка Квант, вып. 87. 2001.

Богданов К.Ю. Прогулки с физикой. М.: Б-ка Квант, вып. 98. 2006. <http://kbogdanov4.narod.ru/>

Когда ходьба переходит в бег

Известно, что тело, движущееся со скоростью v по окружности радиуса l , имеет ускорение, направленное к центру этой окружности и равное v^2/l . При ходьбе на человека действуют

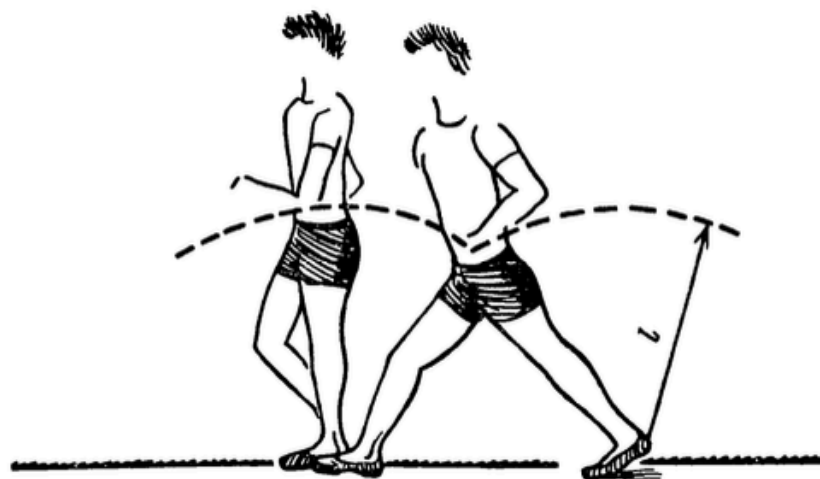


Рис 72. Изменение положения центра тяжести при ходьбе (показано штрихом)

две силы — сила тяжести и сила реакции опоры. Результирующая этих двух сил и является искомой центростремительной силой. Очевидно, что ее величина не может быть больше силы тяжести. Поэтому при ходьбе должно соблюдаться неравенство $mv^2/l \leq mg$, где m — масса идущего человека. Из этого неравенства следует

$$v \leq \sqrt{gl}. \quad (37)$$

Длина ноги взрослого человека составляет около 0,9 м. Подставляя это значение для l в (37), получаем для максимальной скорости ходьбы человека значение около 3 м/с, что согласуется с реальным ее значением. У детей ноги короче, чем у взрослых, и максимальная скорость ходьбы меньше. Поэтому для того, чтобы не отставать на прогулке от взрослых, детям часто приходится переходить на бег. Интересно, что такие же соотношения между максимальной скоростью ходьбы и длиной конечностей имеют место и у четвероногих животных.

Пи-теорема в математике

$$\min_{x \in Q} f(x).$$

$$x_{k+1} = x_k - h \nabla f(x_k).$$

$$R = \|x_0 - x^*\|_2.$$

$$\|\nabla f(x)\|_2 \leq M$$

$$f(\bar{x}_N) - f(x^*) \leq \varepsilon$$

Пи-теорема в математике

Можно ввести размерности и в численные методы оптимизации (и, на самом деле, часто бывает весьма полезно это делать для контроля правильности получаемых формул). А именно, предположим, что целевая функция измеряется в рублях [руб]. То есть ε [руб], а аргумент функции рассчитывается в килограммах [кг], т.е. x [кг]. Тогда R [кг], M [руб/кг], количество итераций N — безразмерная величина. Шаг субградиентного метода h [кг²/руб] — это следует из (2.14).

Считая, что N может зависеть только от R , M , ε , из П-теоремы сразу можно заключить, что существуют такие числа const и α , что $N = \text{const} \cdot (MR/\varepsilon)^\alpha$. Это, конечно, не готовый ответ, но хорошо согласуется с полученным выше результатом $N = M^2 R^2 / \varepsilon^2$.

$$N = \frac{M^2 R^2}{\varepsilon^2}, \quad h = \frac{\varepsilon}{M^2}$$