

Примеры Оптимизации в природе

Гасников Александр

Университет Иннополис

gasnikov@yandex.ru

7 апреля 2026

Источники литературы

Библиотека
«Математическое просвещение»

В. Ю. Протасов

МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ В ГЕОМЕТРИИ



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2012



БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

выпуск 56

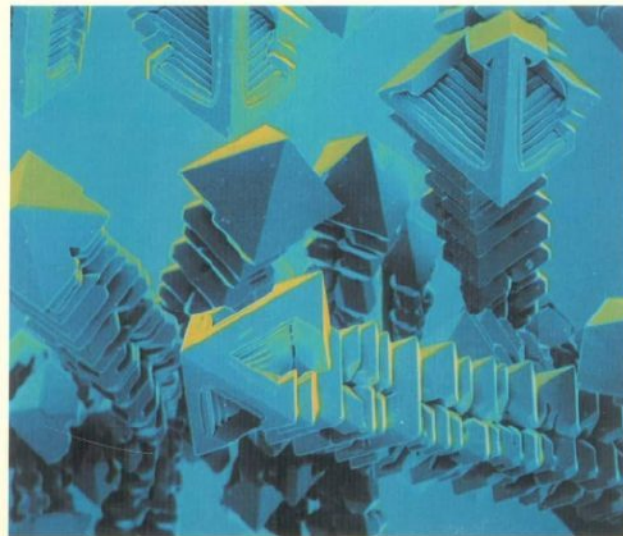
В. М. ТИХОМИРОВ

РАССКАЗЫ О МАКСИМУМАХ И МИНИМУМАХ



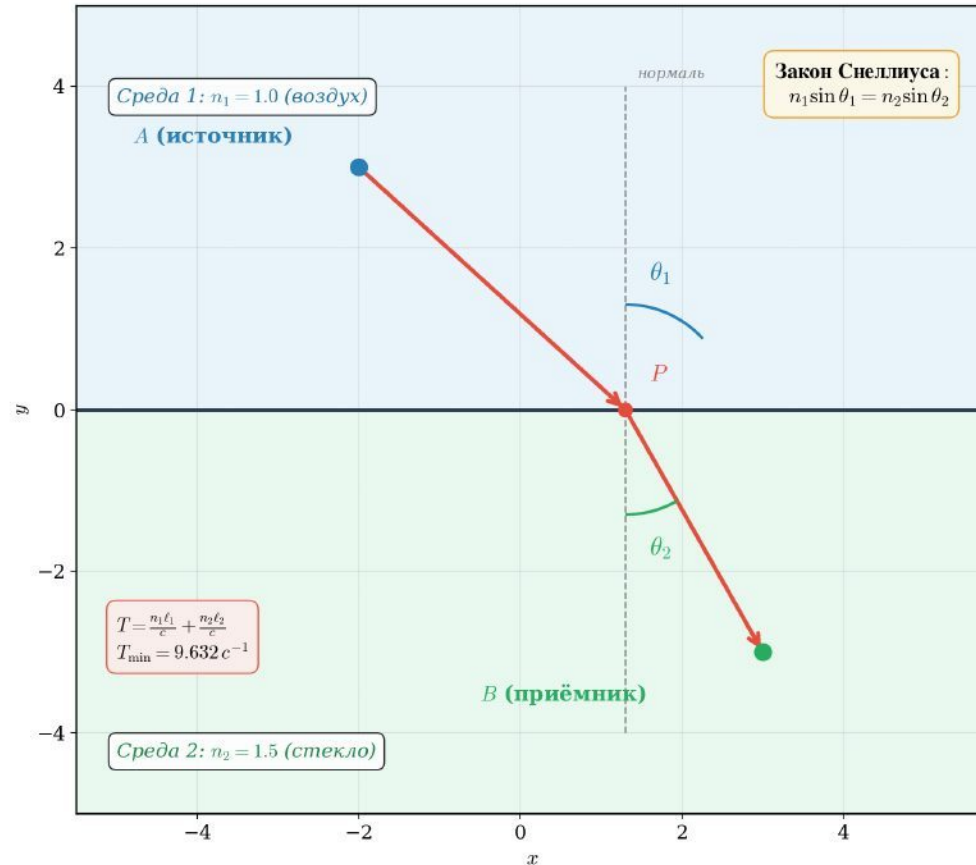
MATHEMATICS AND OPTIMAL FORM

STEFAN HILDEBRANDT AND ANTHONY TROMBA



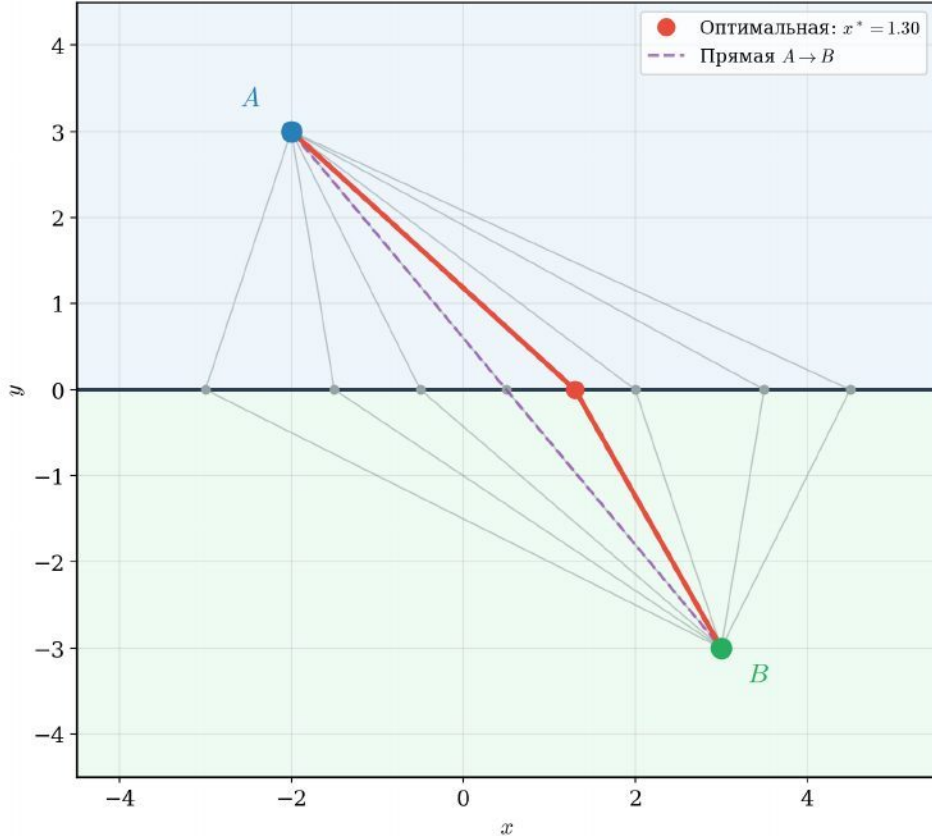
Закон преломления света (принцип Ферма)

Преломление света по принципу Ферма
Луч выбирает путь минимального времени



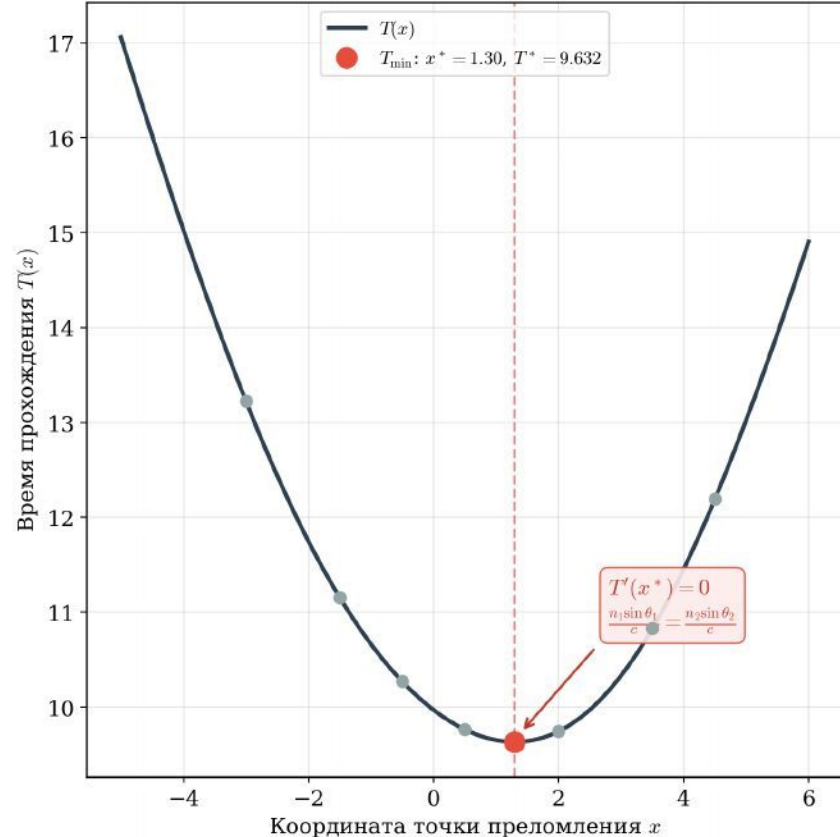
Закон преломления света (принцип Ферма)

Различные пути $A \rightarrow P \rightarrow B$
Серые — неоптимальные, красный — оптимальный



Функционал времени $T(x)$

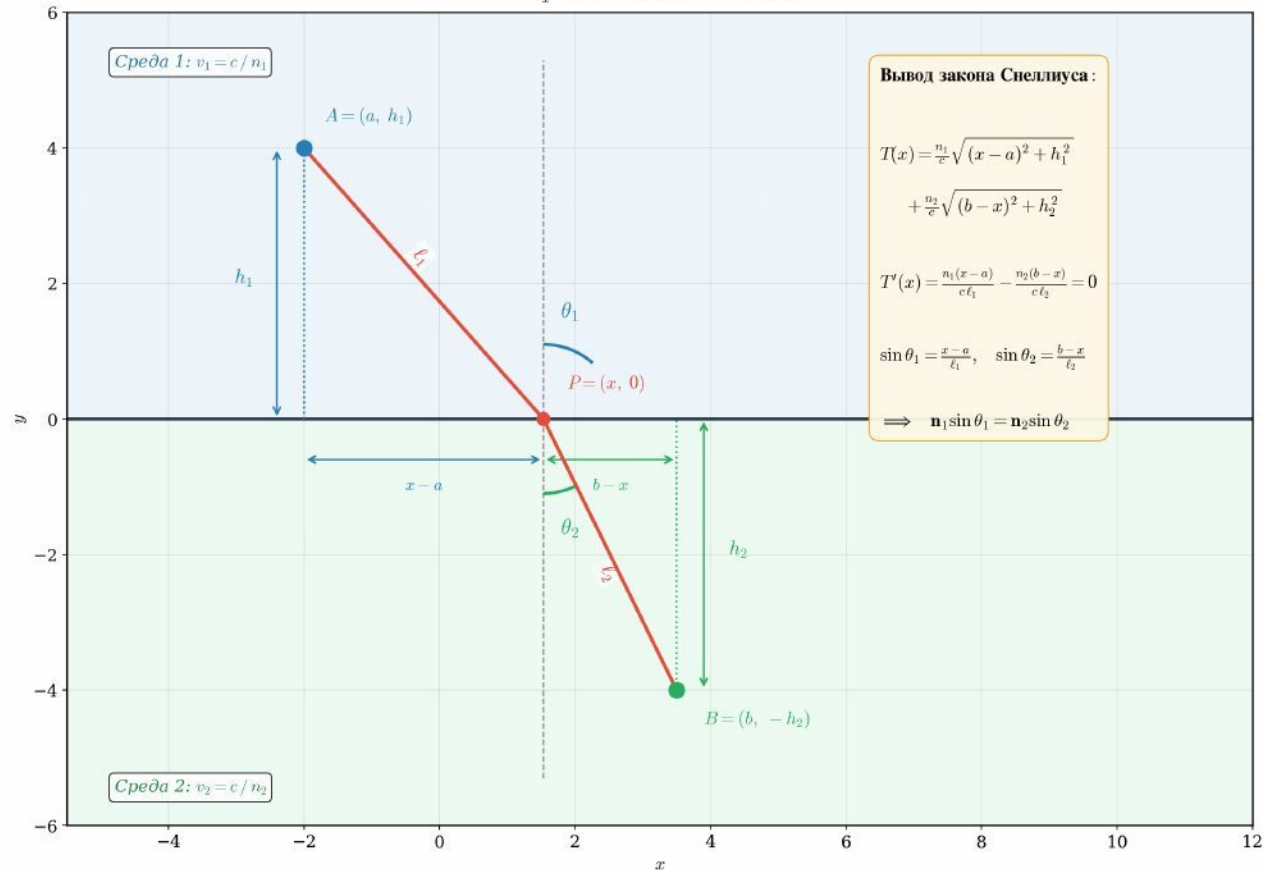
$$T(x) = \frac{n_1}{c} \sqrt{(x - x_A)^2 + y_A^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x - x_B)^2 + y_B^2}$$



Закон преломления света (принцип Ферма)

Геометрический вывод закона Снеллиуса из принципа Ферма

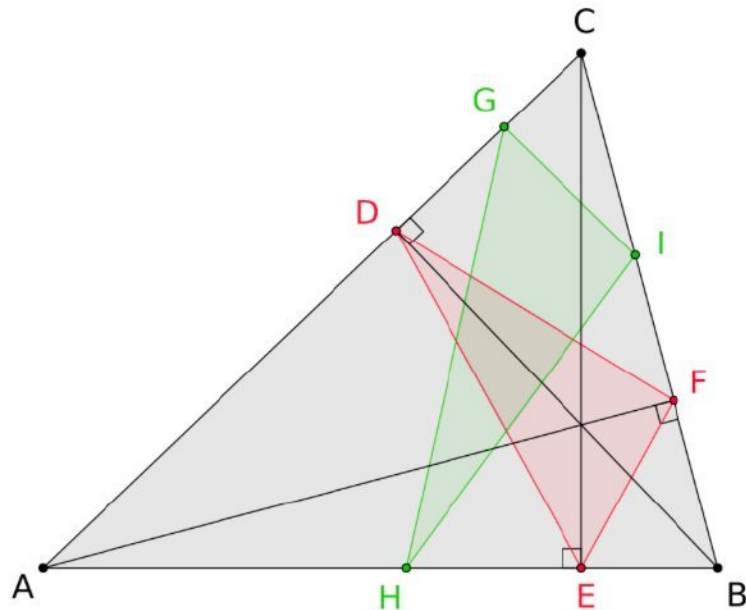
$$\min_x T(x) \Rightarrow n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$



Задача Шварца—Фаньяо о треугольнике наименьшего периметра

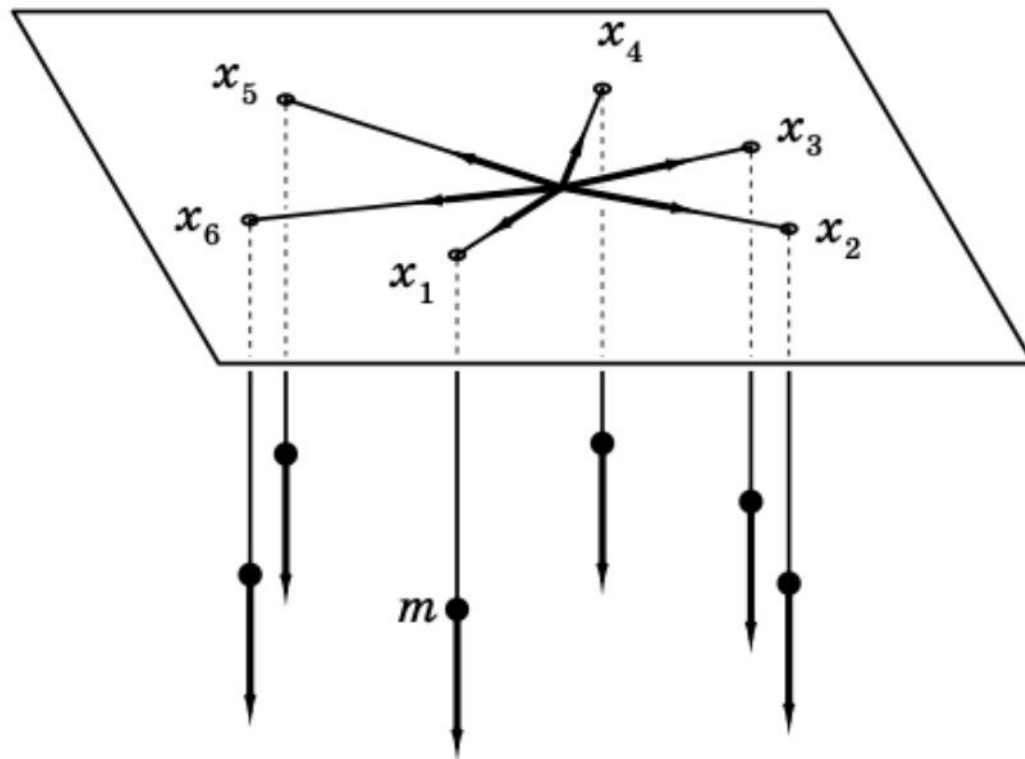
Задача. Вписать в заданный остроугольный треугольник ABC треугольник DEF так, что вершина D лежала на стороне AC , вершина F лежала на стороне CB , вершина E лежала на стороне BA . При этом среди всех таких треугольников требуется найти треугольник с наименьшим периметром.

Идея решения. Прикрепить на соответствующих сторонах колечки (положения колечек будем обозначать буквами D, E, F). Колечки могут двигаться по сторонам без трения. Проденем резинку (растянутую) через колечки. Резинка будет стараться принять наименьшую длину — тем самым решив задачу!



Теорема: Искомым треугольником минимального периметра для любого остроугольного треугольника является **ортоцентрический треугольник** (или треугольник Фаньяно), вершинами которого служат основания высот исходного треугольника.

Где поставить ларек в студгородке?



Чем форма окружности и шара идеальна?



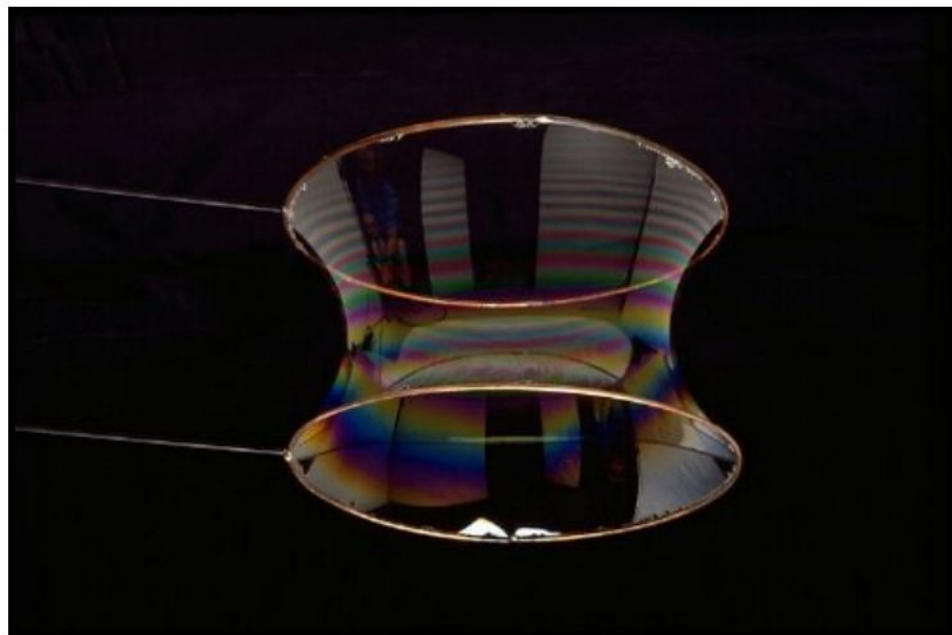
Цепная линия

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

Форма кривой, которая, при заданой длине, минимизирует потенциальную энергию



Висящая цепь образует цепную линию



Цепная линия

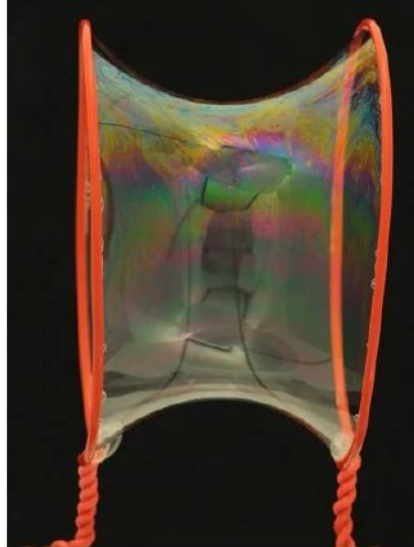
1. Постановка вариационной задачи

Пусть ось Ox проходит через центры обоих колец. Будем искать поверхность, образованную вращением некоторой кривой $y = y(x)$ вокруг оси Ox .

Площадь поверхности вращения на интервале между кольцами $[x_1, x_2]$ задается функционалом:

$$A[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

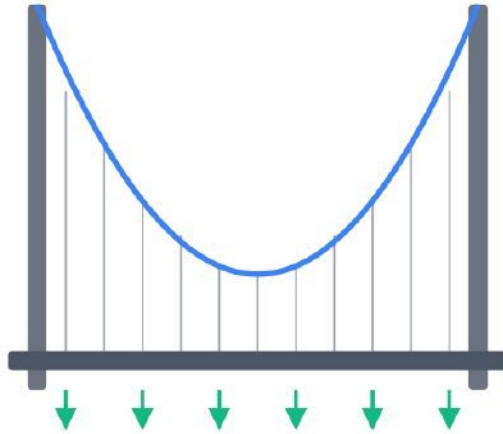
Наша цель — найти функцию $y(x)$, которая доставляет минимум этому функционалу при заданных граничных условиях $y(x_1) = R_1$ и $y(x_2) = R_2$ (радиусы колец).



Цепная линия. Мосты и арки

Подвесной мост (Парабола)

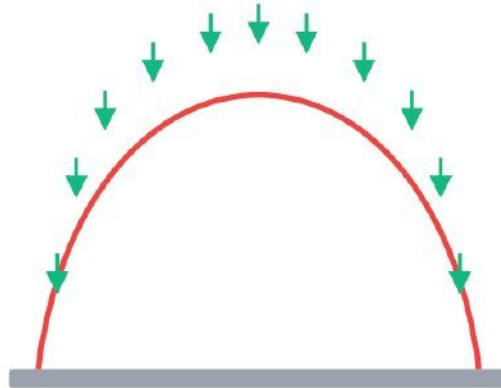
$$y = k \cdot x^2$$



Нагрузка равномерна по оси X

Арочный мост (Перевернутая цепная линия)

$$y = a \cdot \cosh(x/a)$$



Нагрузка равномерна по длине дуги S



Перевернутая цепная линия — идеальная с точки зрения прочности форма для арок. Материал однородной арки с одинаковой по длине **линейной плотностью** (погонной плотностью) в форме перевернутой цепной линии испытывает только механические напряжения **сжатия** и не испытывает напряжений **изгиба**.

Пчелиные соты

Пчелиные соты издавна вызывают у человека восхищение симметрией и красотой своей архитектуры. Удивительно, но оптимальность создаваемых пчёлами конструкций математически обосновать удалось только на протяжении последнего столетия.

На самом деле, пчёлы-строители из вырабатываемого ими воска сооружают ячейки в виде цилиндров (а не шестиугольных призм). Пчела движется от основания ячейки и, вращаясь, лепит вокруг себя стенки цилиндра. Диаметры ячеек почти совпадают, поскольку рабочие пчёлы примерно одного размера.

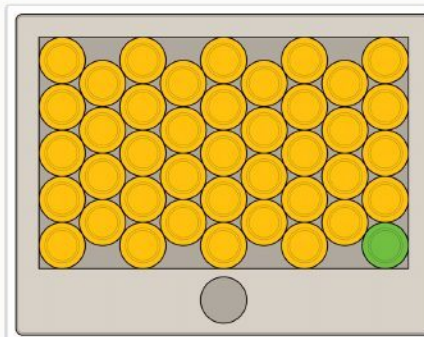
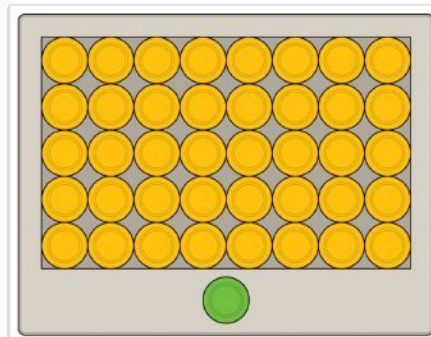
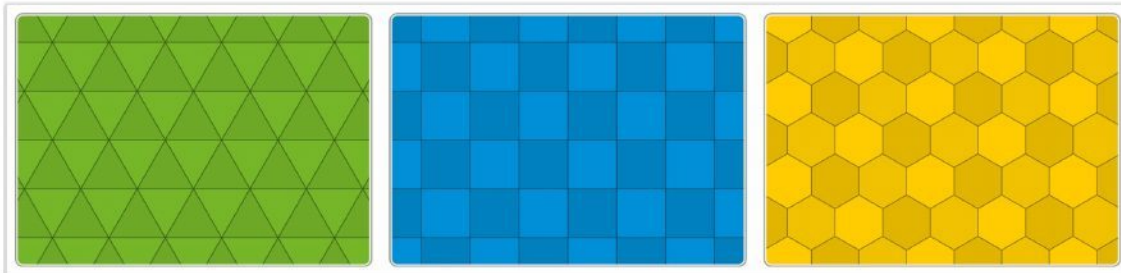
Воск для пчёл — дорогой материал (в сравнении с мёдом), поэтому, строя соты, надо выбрать такую архитектуру, чтобы расход воска был минимальным при разбиении данного большого объёма на одинаковые ячейки.

Математическая постановка задачи такова: надо найти разбиение большой плоской области на элементы малой фиксированной площади (размер пчелы), у которого суммарный периметр границ будет наименьшим. Без дополнительных условий (например, что элементы — выпуклые) задача оказалась сложной. Только в начале XXI века задача была решена в общей постановке: разбиение на правильные шестиугольники оказалось наилучшим.

Но если считать, что элементы разбиения — одинаковые правильные многоугольники, то объяснить преимущество шестиугольников несложно. Ясно, что плоскость можно замостить правильными треугольниками, квадратами, правильными шестиугольниками. Оказывается, других вариантов нет.

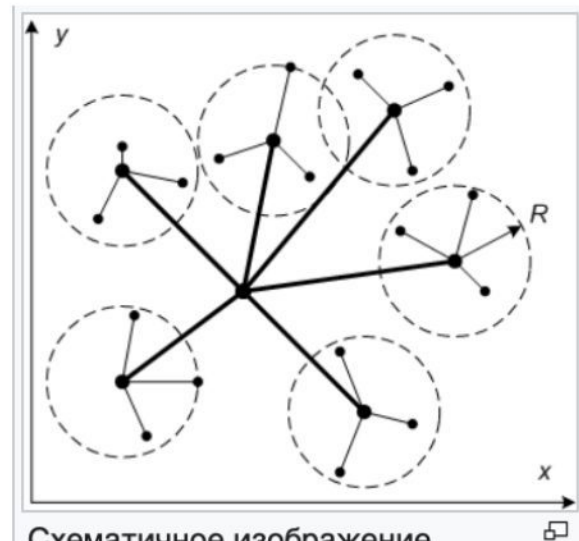


Математическая
составляющая



Алгоритмы пчелиного роя

Основной целью работы пчелиной колонии в природе является разведка пространства вокруг улья с целью поиска нектара с последующим его сбором. Для этого в составе колонии существуют различные типы пчел: пчелы-разведчики и рабочие пчелы-фуражиры (кроме них, в колонии существуют **трутни** и **матка**, не участвующие в процессе сбора нектара). Разведчики ведут исследование окружающего улей пространства и сообщают информацию о перспективных местах, в которых было обнаружено наибольшее количество нектара (для обмена информацией в улье существует специальный механизм, именуемый **танцем пчелы**).

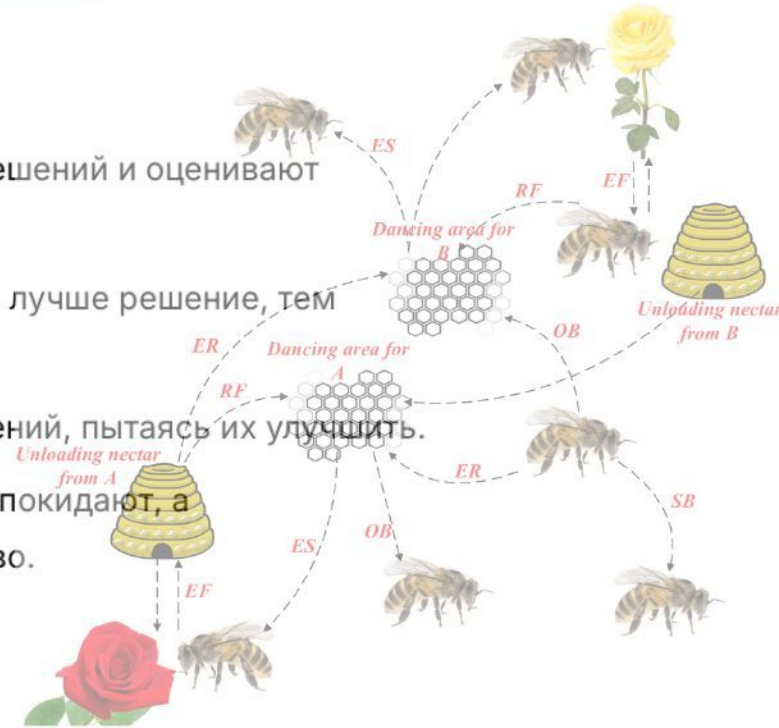


Схематичное изображение стратегии разведки двумерного пространства (жирные линии — вылеты разведчиков, тонкие линии — уточнение решений рабочими пчелами)

Алгоритмы пчелиного роя

Суть

1. **Разведка** — пчёлы-разведчики случайно исследуют пространство решений и оценивают найденные «участки» (решения) по качеству (фитнес-функции).
2. **Вербовка** — лучшие участки получают больше пчёл-фуражиров: чем лучше решение, тем больше пчёл направляется на его окрестность (локальный поиск).
3. **Локальный поиск** — фуражиры исследуют окрестности лучших решений, пытаются их улучшить.
4. **Отказ от слабых участков** — если участок не улучшается, пчёлы его покидают, а освободившиеся разведчики снова случайно исследуют пространство.
5. **Итерация** — цикл повторяется до выполнения критерия останова.



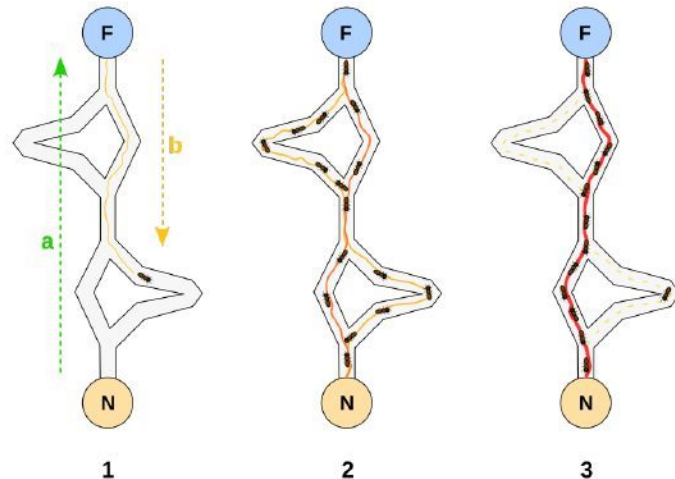
Ключевая идея

Баланс между **эксплуатацией** (углублённый поиск вокруг лучших решений) и **исследованием** (случайный поиск новых областей), что помогает избегать застревания в локальных оптимумах.

Муравьиные алгоритмы

Суть

1. **Феромонный след** — муравьи, перемещаясь, оставляют на пути феромон. Короткие пути проходятся быстрее → феромон на них накапливается интенсивнее.
2. **Вероятностный выбор** — каждый муравей выбирает следующий шаг с вероятностью, зависящей от:
 - количества феромона на ребре (коллективный опыт),
 - эвристической привлекательности (например, обратная длина ребра).
3. **Обновление феромона** — после завершения маршрута муравьи добавляют феромон пропорционально качеству найденного решения (чем короче путь — тем больше феромона).
4. **Испарение** — феромон постепенно испаряется, что позволяет «забывать» плохие решения и избегать застревания в локальных оптимумах.
5. **Итерация** — цикл повторяется; со временем феромонные следы сходятся к оптимальному или близкому к нему решению.



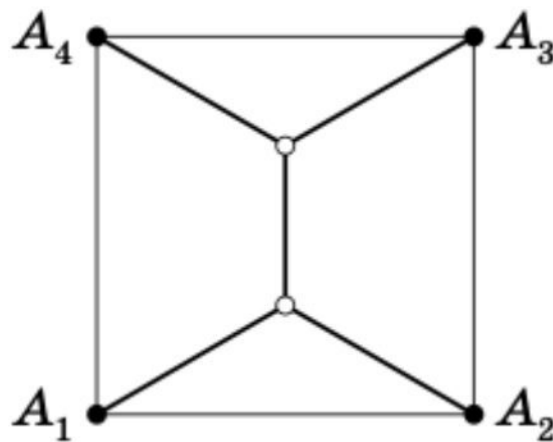
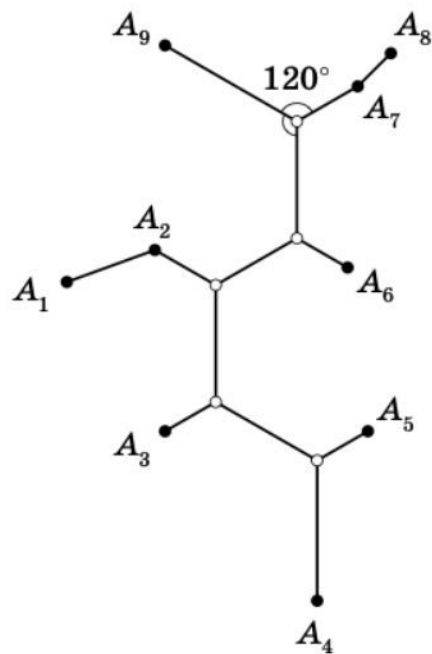
Ключевая идея

Стигмергия — непрямая коммуникация через среду (феромон). Без централизованного управления колония коллективно находит хорошие решения за счёт положительной обратной связи (усиление удачных путей) и отрицательной (испарение неудачных).

Классическое применение — задача коммивояжёра (TSP), маршрутизация в сетях, комбинаторная оптимизация.

Задача Штейнера

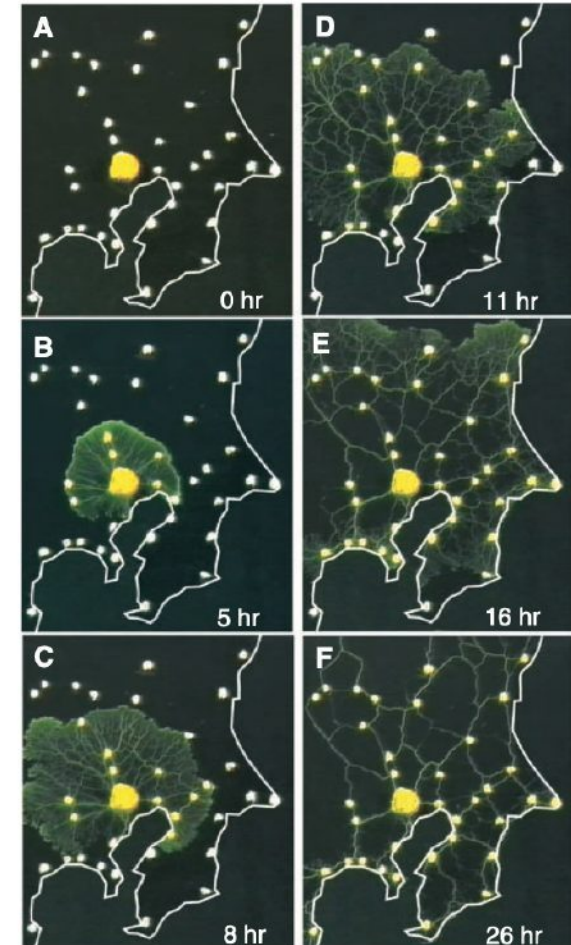
В пространстве даны точки (конечное число). Соединить их системой кривых наименьшей суммарной длины.



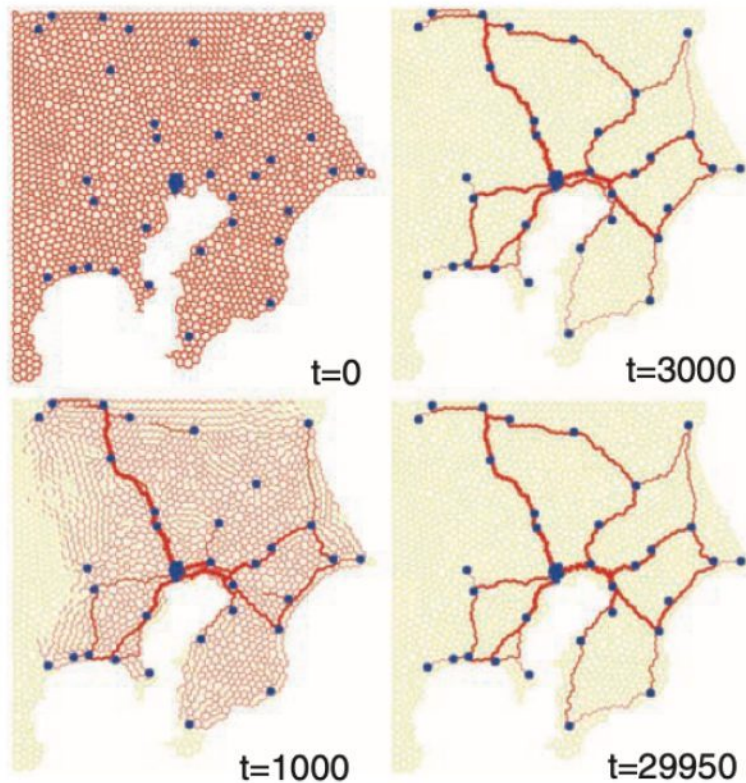
Rules for Biologically Inspired Adaptive Network Design

Atsushi Tero,^{1,2} Seiji Takagi,¹ Tetsu Saigusa,³ Kentaro Ito,¹ Dan P. Bebber,⁴ Mark D. Fricker,⁴ Kenji Yumiki,⁵ Ryo Kobayashi,^{5,6} Toshiyuki Nakagaki^{1,6*}

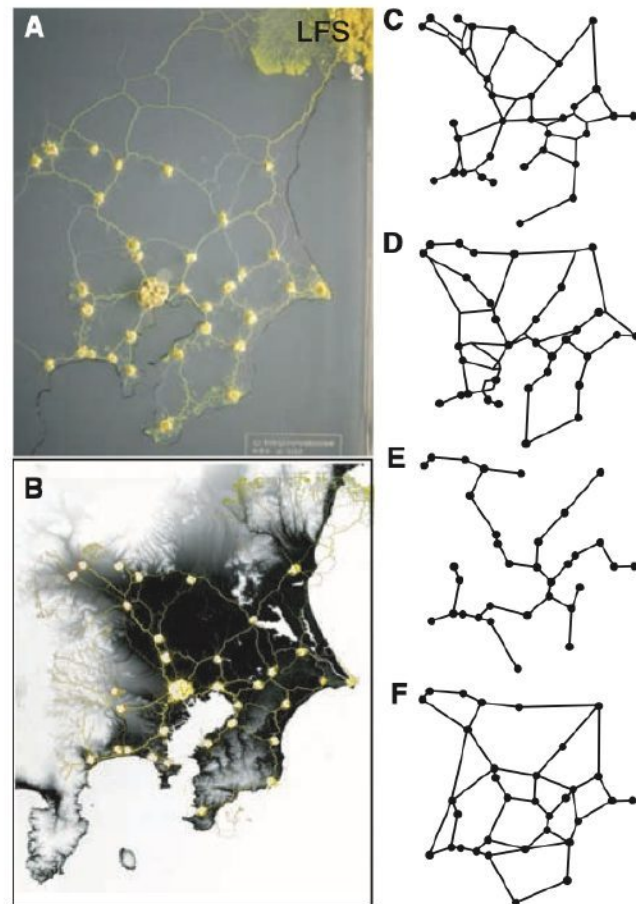
Transport networks are ubiquitous in both social and biological systems. Robust network performance involves a complex trade-off involving cost, transport efficiency, and fault tolerance. Biological networks have been honed by many cycles of evolutionary selection pressure and are likely to yield reasonable solutions to such combinatorial optimization problems. Furthermore, they develop without centralized control and may represent a readily scalable solution for growing networks in general. We show that the slime mold *Physarum polycephalum* forms networks with comparable efficiency, fault tolerance, and cost to those of real-world infrastructure networks—in this case, the Tokyo rail system. The core mechanisms needed for adaptive network formation can be captured in a biologically inspired mathematical model that may be useful to guide network construction in other domains.



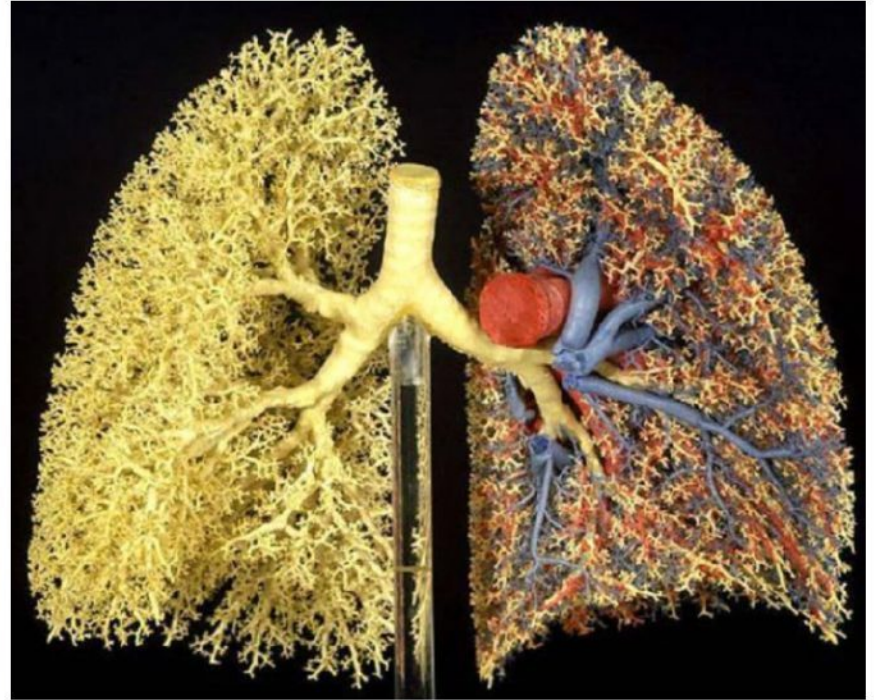
Природа решает задачи проектирования оптимальной сети



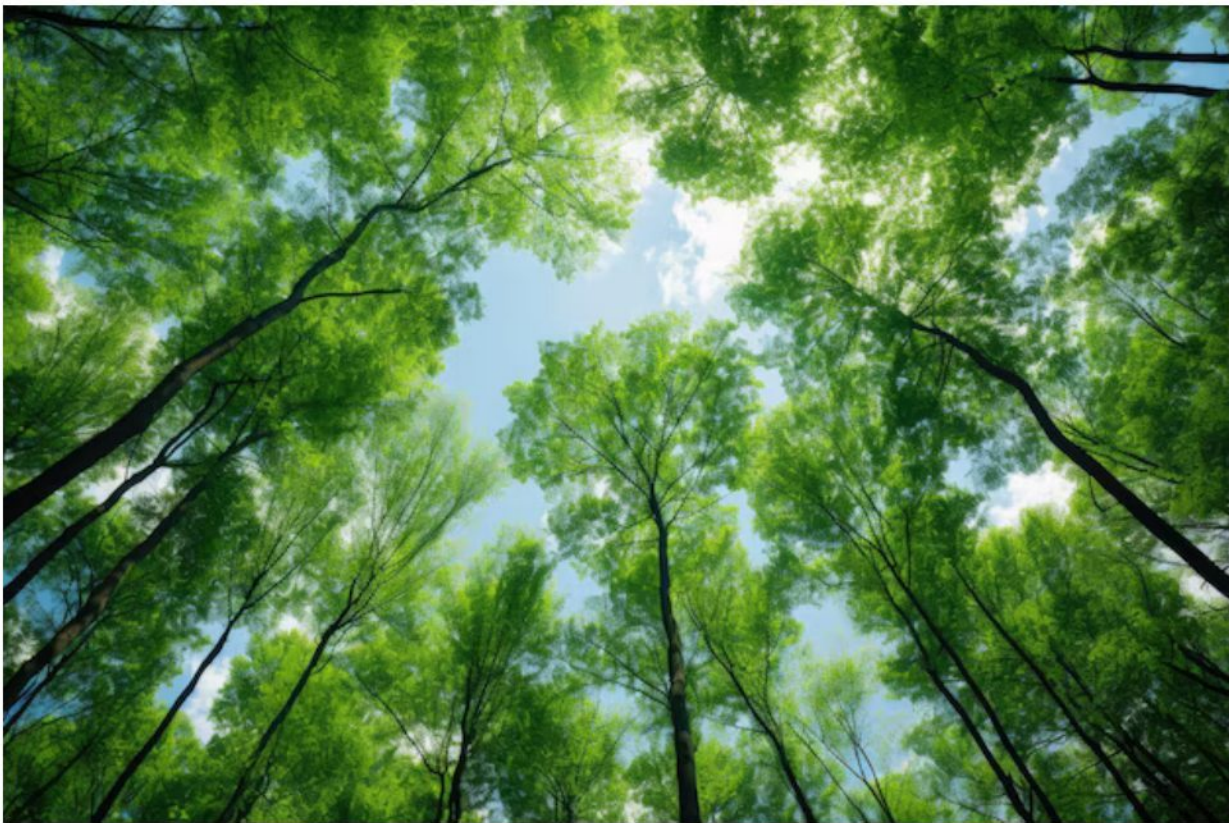
$$Q_{ij} = \frac{\pi r^4 (p_i - p_j)}{8\eta L_{ij}} = \frac{D_{ij}(p_i - p_j)}{L_{ij}}$$



Фрактальная природа деревьев и живых организмов



Почему деревья такие высокие, в чем тут оптимизация?

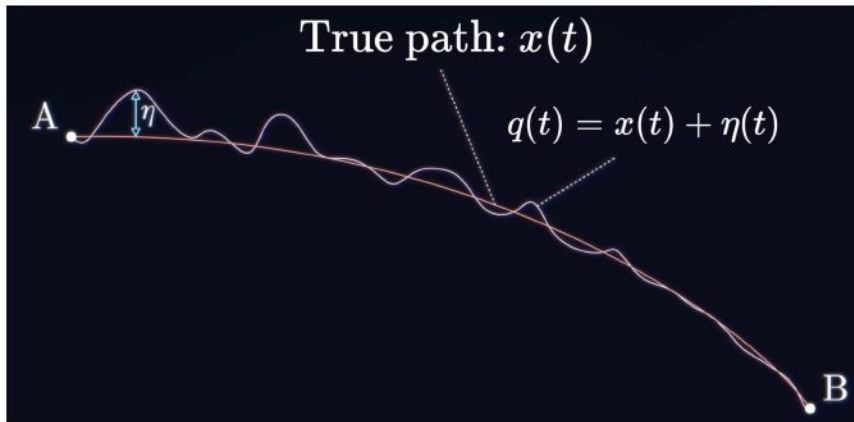


Принцип наименьшего действия (Физика)

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

или

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right) dt$$



https://vk.com/video-55155418_456242150?ysclid=mnmbbaiypv444307137

VERITASIUM

Принцип наименьшего действия — самый общий закон...

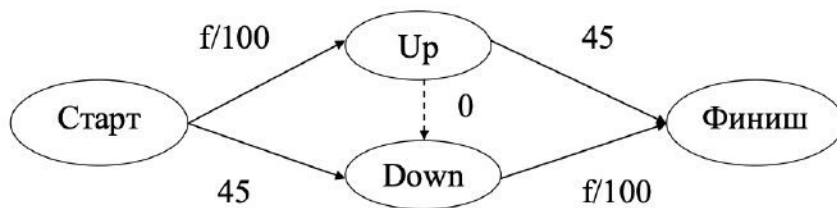
vk.com › video-55155418_456242150

Принцип наименьшего (или «стационарного») действия — вероятно, самое близкое к «теории всего», что существует в современной науке.

56 тыс. просмотров · 15 апр 2025

Вариационные принципы в Экономике

Парадокс Браеса (модель Бэкмана)



Корреспонденция: $d = 4000$ авт/час, $x_{up} + x_{down} = d$.

Равновесие: $x_{up} = 2000$ авт/час, $x_{down} = 2000$ авт/час,

$$T_{up}(x) = T_{down}(x) = 65 \text{ мин.}$$

Равновесие (если есть ребро Up->Down): $x_{up,down} = 4000$ авт/час,

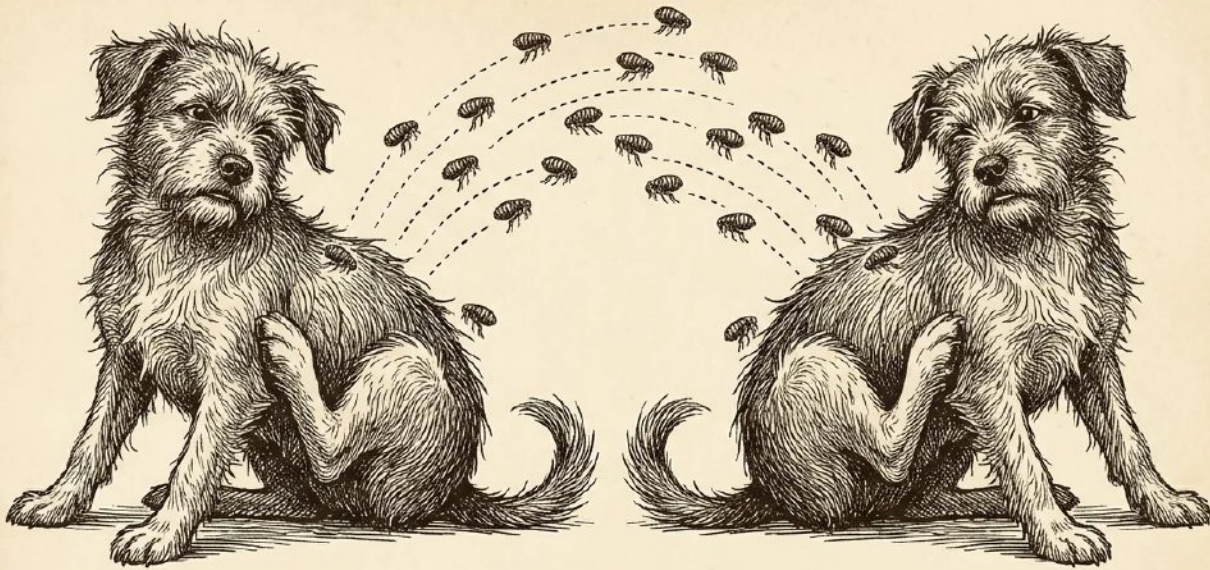
$$T_{up,down}(x) = 80 \text{ мин.}$$

$$\Psi(x) = \sum_{e \in E} \sigma_e(f_e) \rightarrow \min_{f \in \Theta X, x \in X}, \sigma_e(f_e) = \int_0^{f_e} \tau_e(z) dz. \quad (1)$$

Платные дороги: $\bar{\tau}(f) = \tau(f) + \underbrace{f \tau'(f)}_{\text{штраф}}$. (VCG – механизм);

$$x_{up} = x_{down} = 1750 \text{ авт / час}, x_{up,down} = 500 \text{ авт / час}.$$

Вариационные принципы в теории макросистем



ПАРАДОКС ЭРЕНФЕСТОВ

Вариационные принципы в теории макросистем

Задача 1 (модель П. и Т. Эренфестов в форме Кельберта–Сухова)*. Рядом стоят две собаки с номерами 1 и 2 . На собаках как-то расположились $N \gg 1$ блох. Каждая блоха в промежутке времени $[t, t+h)$ с вероятностью $\lambda h + o(h)$ ($\lambda = 1$) независимо от остальных перескакивает на соседнюю собаку. Пусть в начальный момент все блохи собрались на собаке с номером 1 . Покажите, что для всех $t \geq \chi \ln N$

$$P\left(\frac{|n_1(t) - n_2(t)|}{N} \leq \frac{3}{\sqrt{N}}\right) \geq 0.99,$$

где $n_1(t)$ – число блох на первой собаке в момент времени t , а $n_2(t)$ – на второй (случайные величины). Т.е. относительная разность числа блох на собаках будет иметь порядок малости $O(1/\sqrt{N})$ на больших временах ($T \geq \chi \ln N$). Покажите также, что математическое ожидание времени первого возвращения в начальное состояние (когда все блохи собраны на собаке с номером 1) равно $2^N/N$.



Вариационные принципы в теории макросистем

Введем вектор $p(t) = (p_0(t), \dots, p_N(t))^T$, где $p_i(t)$ – вероятность того, что на собаке с номером I в момент времени $t \geq 0$ ровно i блох. Тогда в уравнении Колмогорова–Феллера

$$\frac{dp(t)}{dt} = \Lambda^T p(t)$$

инфинитезимальная матрица Λ имеет следующий вид:

$$[\Lambda]_{ij} = \begin{cases} 0, & |i-j| > 1 \\ \lambda i, & j = i-1 \\ \lambda(N-i), & j = i+1 \\ -\lambda N, & j = i \end{cases}.$$

Вариационные принципы в теории макросистем

Описанная марковская динамика имеет закон сохранения числа блох: $n_1(t) + n_2(t) \equiv N$, и это будет единственный закон сохранения. Стационарная (инвариантная) мера имеет вид (теорема Санова):

$$\nu(n_1, n_2) = \nu(c_1 N, c_2 N) = N! \frac{(1/2)^{n_1}}{n_1!} \frac{(1/2)^{n_2}}{n_2!} = C_N^{n_1} 2^{-N} \simeq \frac{2^{-N}}{\sqrt{2\pi c_1 c_2}} \exp(-N \cdot H(c_1, c_2)),$$

где $H(c_1, c_2) = \sum_{i=1}^2 c_i \ln c_i$. Кстати, сказать, из такого вида стационарной меры, можно получить, что если в начальный момент все блохи находились на одной собаке, то математическое ожидание времени первого возвращения макросистемы в такое состояние будет порядка $2^N/N$. Равновесие данной макросистемы естественно определять как состояние, в малой окрестности которого сконцентрирована стационарная мера (принцип максимума энтропии Больцмана–Джейнса)

$$c^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \arg \min_{\substack{c_1 + c_2 = 1 \\ c \geq 0}} H(c).$$

Вариационные принципы в теории макросистем

Этот же результат можно было получить и при другом порядке предельных переходов (обратном к рассмотренному выше порядку: $t \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$). А именно, сначала считаем, что при $t=0$ существует предел $c_i(t) \stackrel{\text{п.н.}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} n_i(t)/N$. Тогда (теорема Т. Куртца) этот предел существует при любом $t > 0$, причем $c_1(t)$, $c_2(t)$ – детерминированные (не случайные) функции, удовлетворяющие СОДУ

$$\frac{dc_1}{dt} = \lambda(c_2 - c_1),$$

$$\frac{dc_2}{dt} = \lambda(c_1 - c_2).$$

Глобально устойчивым положением равновесия этой СОДУ будет c^* , а $H(c)$ – функция Ляпунова этой СОДУ (убывает на траекториях СОДУ, и имеет минимум в точке c^*).