

Фракталы

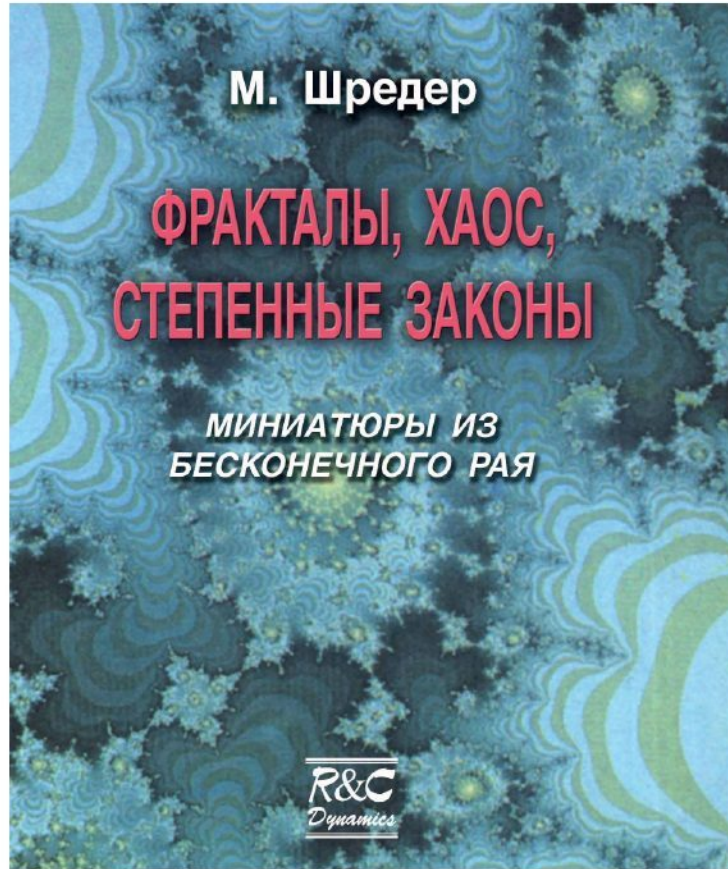
Гасников Александр

Университет Иннополис

gasnikov@yandex.ru

18 марта 2026

Фракталы... Бенуа Мандельброт



А. Эйнштейн и теорема Пифагора

26

Глава 1

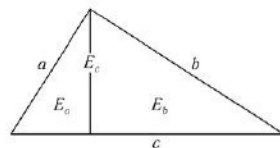


Рис. 1. Теорема Пифагора: чертёж к доказательству на основе подобия треугольников, предложенному одиннадцатилетним Эйнштейном.

В евклидовой геометрии площади подобных (замкнутых) фигур относятся как *квадраты* соответствующих *линейных* размеров. Следовательно, площади E_a , E_b и E_c (E — начальная буква немецкого слова *Ebene* — плоскость) трех треугольников на рис. 1 связаны с их гипотенузами a , b и c соотношениями

$$E_a = ma^2, \quad (1)$$

$$E_b = mb^2, \quad (2)$$

$$E_c = mc^2, \quad (3)$$

где m — некоторый безразмерный отличный от нуля множитель, *один и тот же во всех трех соотношениях*.

Бросив на рис. 1 второй взгляд, мы обнаружим, что площадь большого треугольника равна сумме площадей двух меньших треугольников:

$$E_a + E_b = E_c.$$

Используя соотношения (1)–(3), получаем

$$ma^2 + mb^2 = mc^2.$$

Наконец, деля это равенство на общую меру m , мы приходим к знаменитому выводу Пифагора:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Теорема доказана одиннадцатилетним ребенком¹ путем комбинирования двух плодотворных научных принципов, которых впоследствии неукоснительно придерживался взрослый Эйнштейн: простоты

¹На которого в его школьные годы в Мюнхене никто не обращал внимания [206].

Самоподобная расстановка ферзей

Самоподобная расстановка ферзей, не бьющих друг друга

29

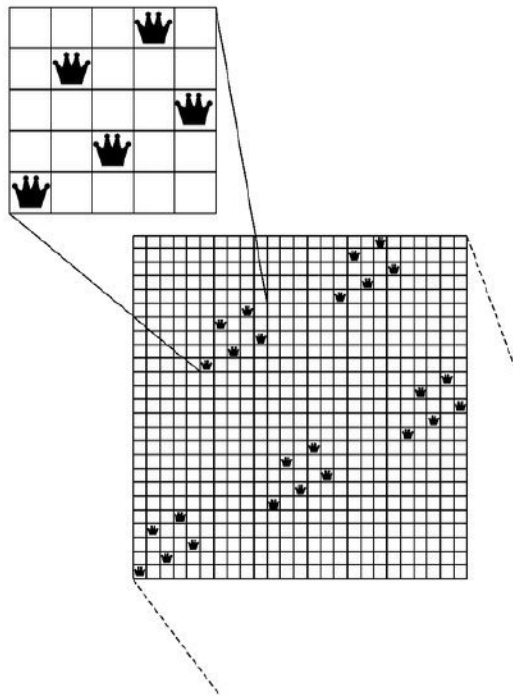


Рис. 3. Пять не бьющих друг друга ферзей на доске 5×5 (вверху), и аналогичная расстановка 25 ферзей на доске 25×25 , полученная из доски 5×5 с помощью подобия.

Снежинка фон Коха

Самоподобная снежинка

31

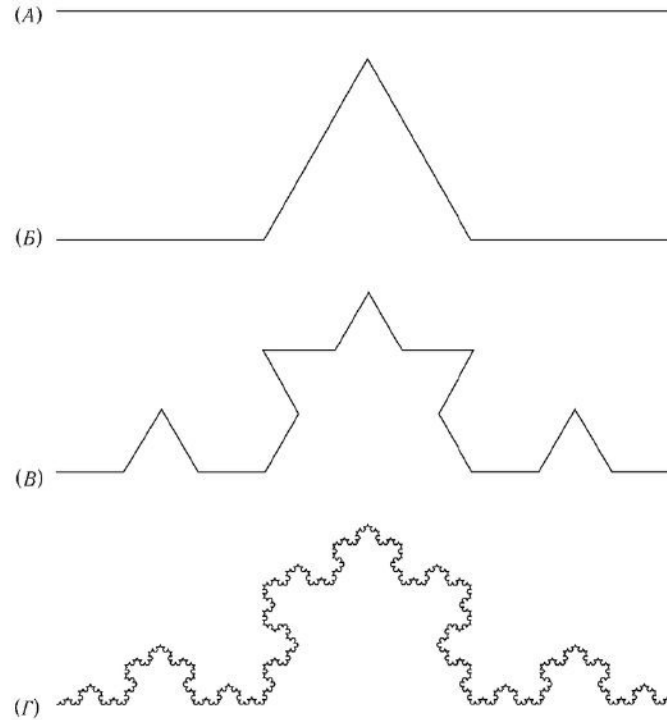


Рис. 4. Инициатор (А) и генератор (Б) для кривой фон Коха. Следующая стадия построения кривой фон Коха (В) и аппроксимация высокого порядка к кривой фон Коха (Г).

Снежинка фон Коха

(А)



(Б)

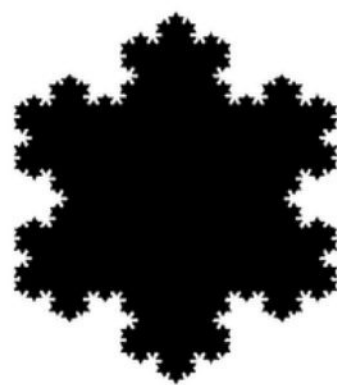
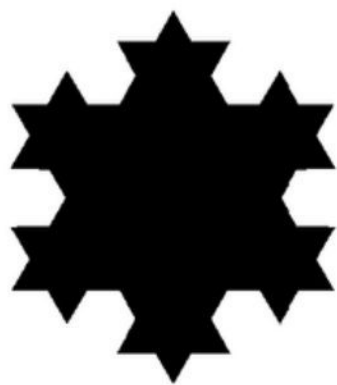
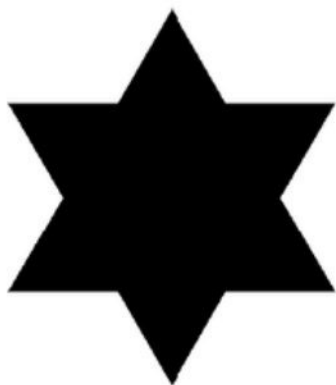


Рис. 5. Инициатор и генератор для снежинки фон Коха (А) и промежуточные стадии построения снежинки фон Коха (Б).

Снежинка фон Коха

Для гладкой кривой ее приближенная длина $L(r)$ определяется как произведение числа N прямолинейных отрезков, уместяющихся на кривой, на длину такого отрезка r : $L(r) = N \cdot r$. Когда длина шага r стремится к нулю, величина $L(r)$ стремится к конечному пределу — длине L рассматриваемой кривой.

Иначе обстоит дело в случае фракталов! Произведение $N \cdot r$ обращается в бесконечность, потому что когда r стремится к нулю, мы учитываем все более мелкие извивы фрактала. Однако асимптотически

Снежинка фон Коха

это стремление к бесконечности происходит по некоторому четко определенному однородному степенному закону от r . Иначе говоря, существует некоторый *критический показатель* $D_H > 1$, такой, что произведение $N \cdot r^{D_H}$ остается конечным. При показателях меньших, чем D_H , произведение расходится, т. е. обращается в бесконечность, а при показателях больших, чем D_H , — стремится к нулю. Этот критический показатель D_H называют *размерностью Хаусдорфа* в честь немецкого математика Феликса Хаусдорфа (1868–1942). Справедливо следующее соотношение:

$$D_H = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(1/r)}$$

(это определение размерности Хаусдорфа эквивалентно приведенному выше). Если при построении кривой или снежинки фон Коха n -го поколения (n -й итерации) шаг выбран равным $r = r_0/3^n$, то число шагов N пропорционально 4^n . Таким образом,

$$D_H = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26 \dots$$

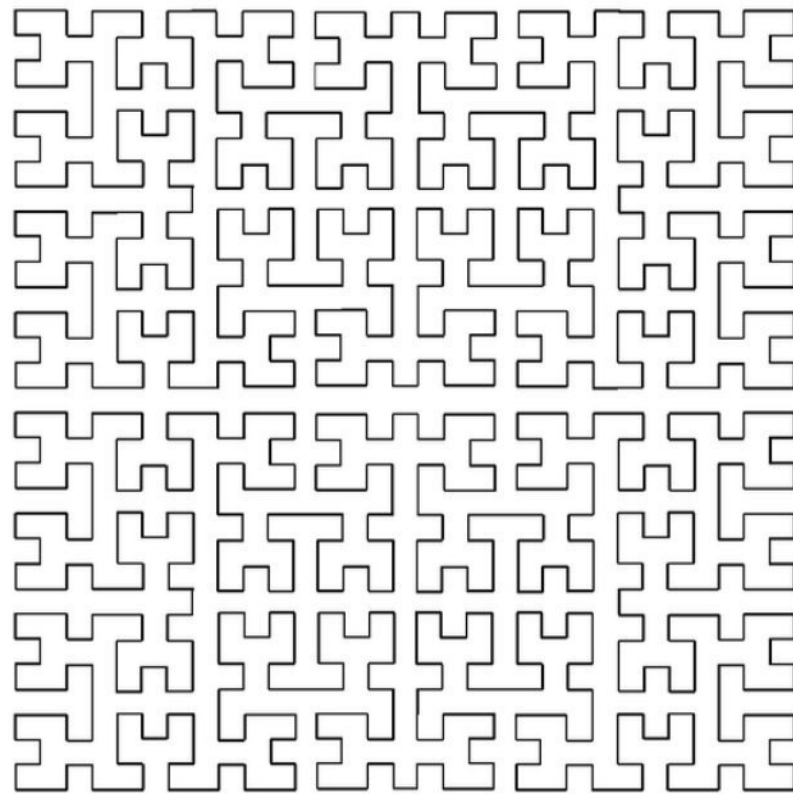
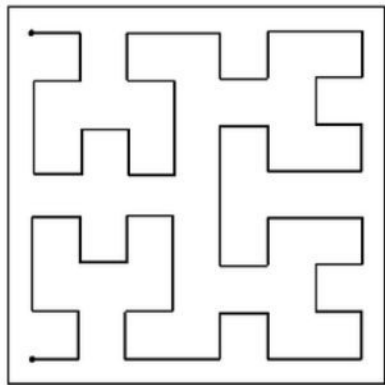
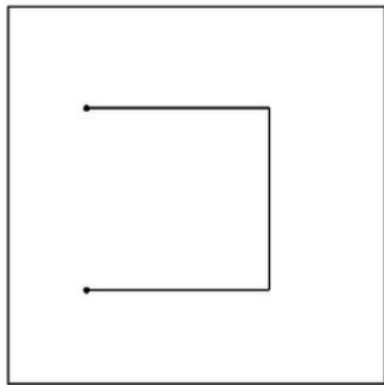
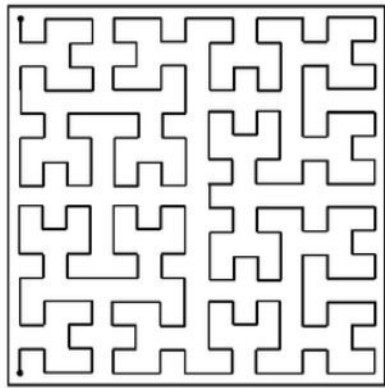
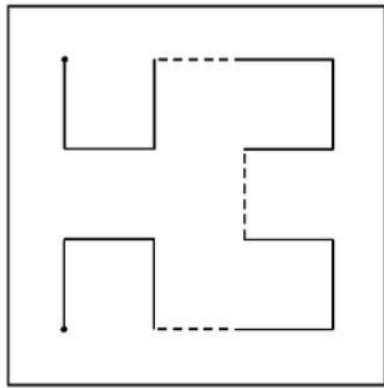
Фрактальная береговая линия



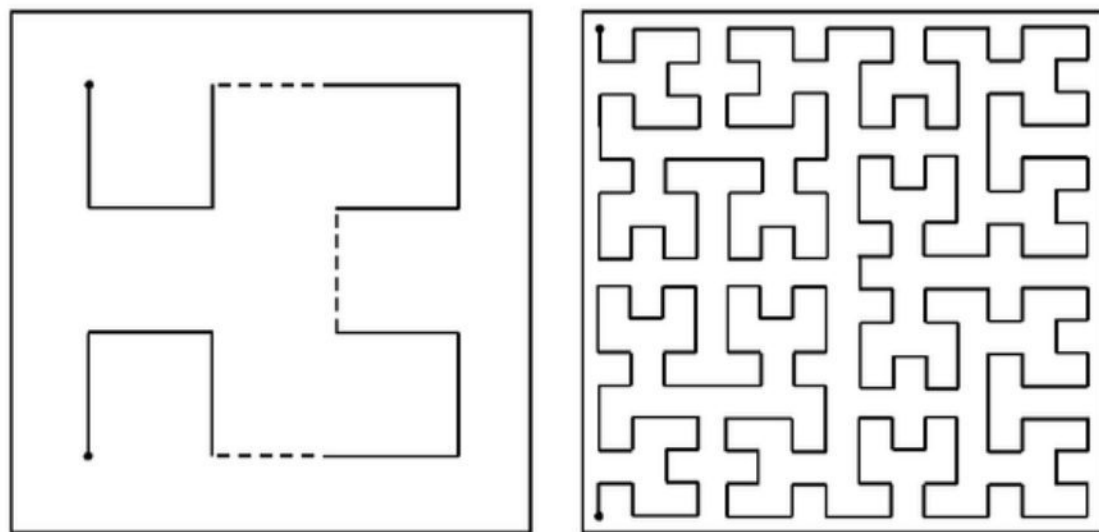
Фрактальная береговая линия



Всюду плотная кривая Гильберта

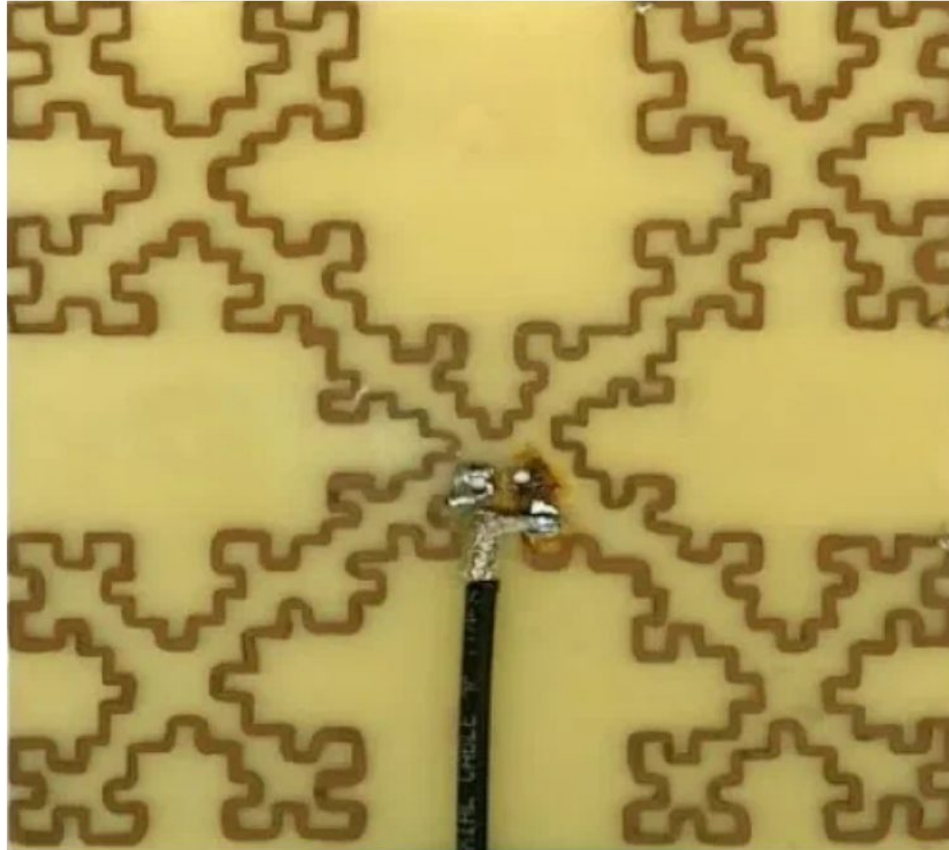


Всюду плотная кривая Гильберта



Поскольку n -е поколение кривой Гильберта состоит из $2^{2n} - 1$ звеньев длиной $1/2^n$, ее размерность Хаусдорфа равна 2, как и подобает кривой, заполняющей плоскую фигуру. На рис. 7 вы видите вариант кривой Гильберта, рожденный фантазией художника. Распознаете ли вы в хитросплетениях и извивах кривой человеческое лицо?

Фрактальные антенны



Замоещение плоскости фрактальной плиткой

Если внутренние углы между звеньями равны 120° , то длины трех звеньев будут составлять $1/\sqrt{7}$ от первоначальной длины стороны правильного шестиугольника.

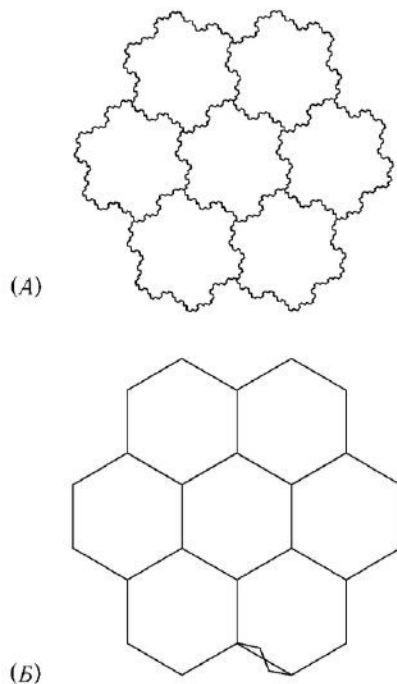


Рис. 9. (А) Разбиение плоскости с помощью фрактальных плиток, плотно подогнанных друг к другу. Совокупность семи плиток подобна одной плитке, что порождает «неевклидов» парадокс. (Б) Разбиение плоскости на правильные шестиугольники — инициатор фрактальных плиток, изображенных на рис. А. Показан также один генератор, состоящий из трех прямолинейных отрезков.

Взглянув на рис. 10А, нетрудно заметить, что периметры меньших фрактальных шестиугольников укладываются в периметре большого фрактального шестиугольника ровно три раза. Следовательно, по евклидову правилу соотношения площадей подобных геометрических фигур, площадь большого шестиугольника должна была бы быть в $3^2 = 9$ раз больше площади любого из меньших фрактальных шестиугольников. Но это не так: площадь большого шестиугольника только в 7 раз больше площади меньшего шестиугольника!

единице, но могут превосходить ее. Например, размерность Хаусдорфа D_H периметра наших шестиугольных фракталов оказывается равной $\ln 3 / \ln \sqrt{7} = 1,12915\dots$. Поэтому, следуя идее Евклида о пропорциональности отношения площадей подобных фигур, чтобы получить соотношение площадей для нашего случая, мы должны были бы возвести 3 («отношение» периметров) не в квадрат, а (поскольку периметр имеет размерность $1,12915\dots$) в степень $2/1,12915\dots = 1,77124\dots$. Если верить моему карманному калькулятору, то это дает отношение площадей, равное $6,999999999$ — что достаточно близко к истинному отношению, равному 7, величина которого видна из рис. 9А. Таким образом, мы имеем все основания для того, чтобы сформулировать заново теорему Евклида об отношении площадей подобных фигур и получить более общий результат, применимый и к фракталам, и к нефракталам:

Кантонов множество

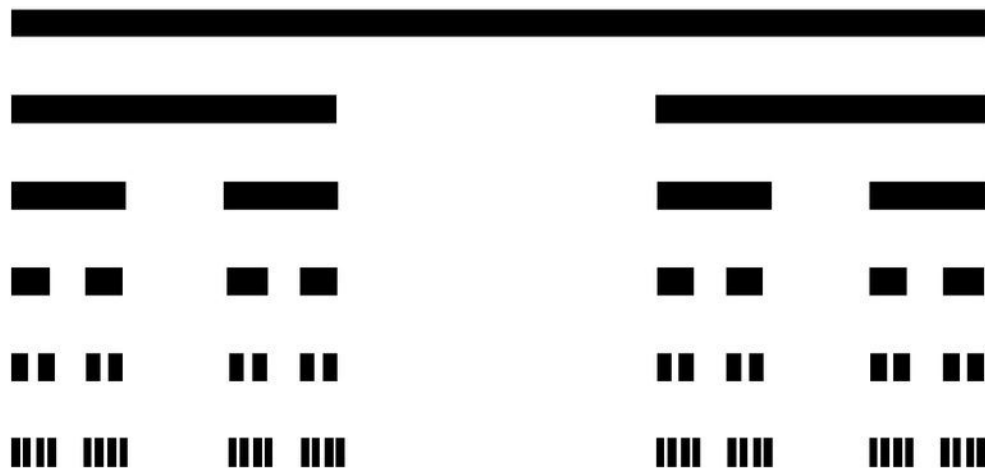


Рис. 10. Построение канторова множества «стертой средней трети». Оно имеет нулевую меру и тем не менее неисчислимо. Фрактальная размерность такого множества равна $\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0,63 \dots$

Хаусдорфа D_H равна $\ln 2 / \ln 3 = 0,63 \dots$, т.е. принимает значение между 0 и 1, как и следовало ожидать, поскольку канторова пыль больше (гораздо больше!), чем точка (размерность 0), и много меньше, чем отрезок прямой или кривой (размерность 1). Как и в случае фрактальной кривой фон Коха значение D_H не является целым (в действительности D_H для канторова множества — трансцендентное число).

Ковер Серпинского

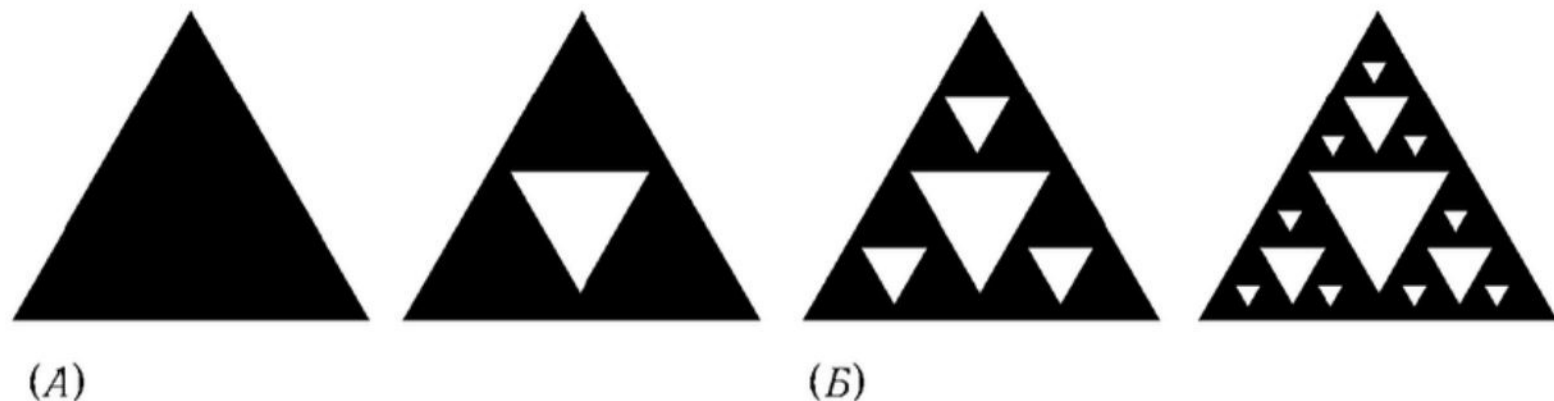
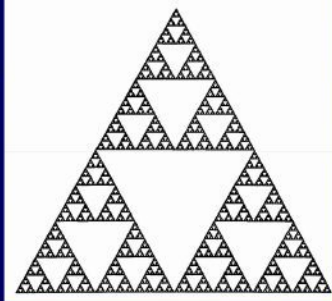


Рис. 11. (А) Генератор для ковра Серпинского. (Б) К построению ковра Серпинского — двумерного несчетного множества нулевой меры с фрактальной размерностью $\frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58\dots$

Существуют ли двумерные множества, подобные канторовой пыли? Да, существуют. Начнем с равностороннего треугольника, изображенного слева на рис. 11А и удалим перевернутый центральный равносторонний треугольник со стороной, равной половине длины стороны исходного треугольника. У нас останутся три равносторонних тре-

Ковер Серпинского



угольника со сторонами, вдвое меньшими стороны исходного треугольника. Повторяя эту операцию над оставшимися (не перевернутыми) треугольниками, мы получаем после n итераций $N = 3^n$ треугольников со сторонами $r = r_0(2^{-n})$ (рис. 11Б). Множество, которое получается при бесконечном повторении данной процедуры, называется *ковром Серпинского* в честь польского математика Вацлава Серпинского (1882–1969), автора многочисленных работ по теории чисел и топологии. Размерность Хаусдорфа для такого множества равна $\ln 3 / \ln 2 = 1,58\dots$. Это иррациональное число меньше 2, несмотря на то, что ковер Серпинского существует в двумерном пространстве.

Рисунки Морица Эшера

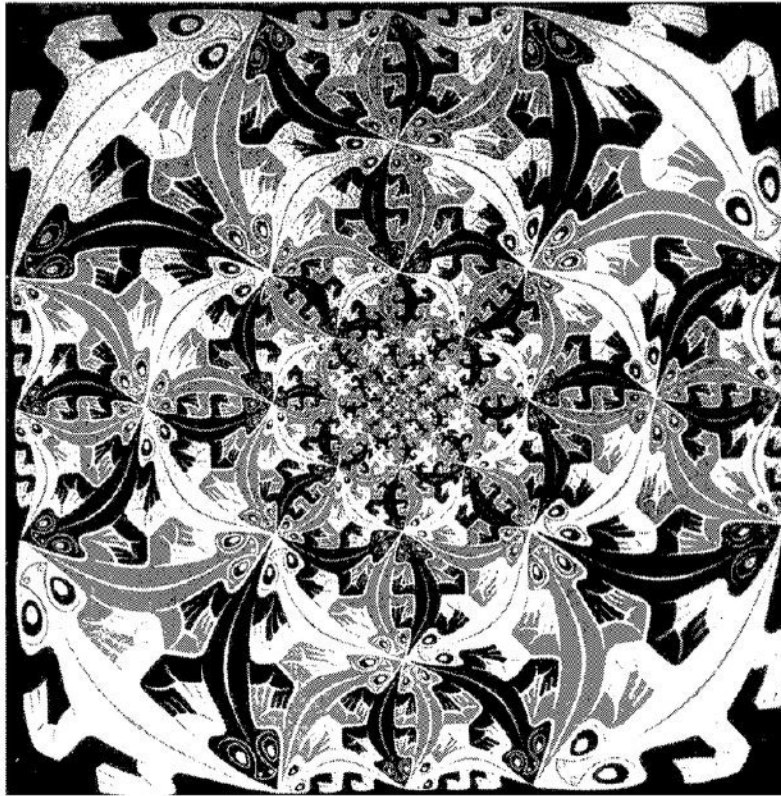


Рис. 12. Картина Эшера, в которой поворотная симметрия сочетается с бесконечным скейлингом.

Трёхмерный вариант ковра Серпинского

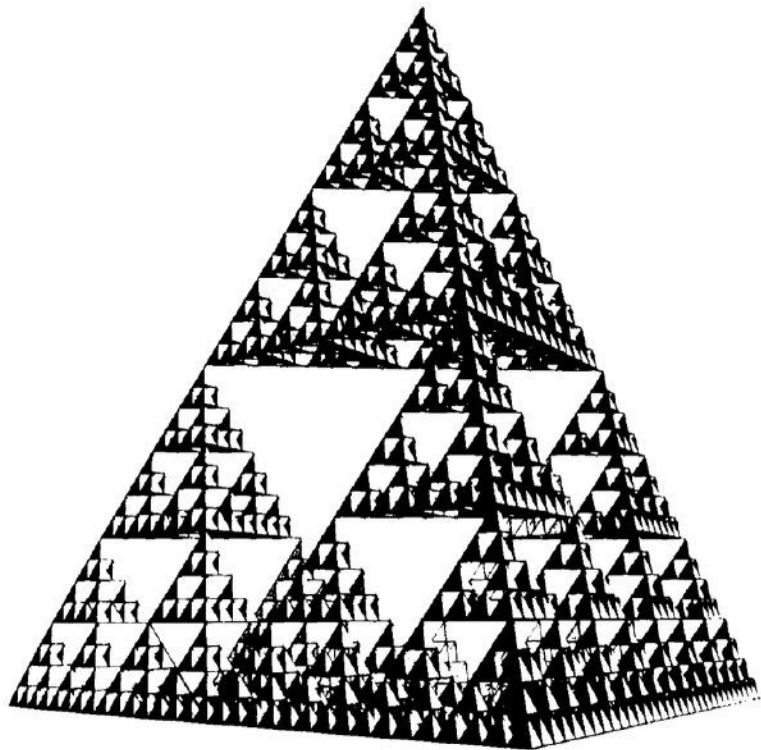


Рис. 13. Трёхмерный вариант ковра Серпинского. Его фрактальная размерность $\ln 4 / \ln 2 = 2$ имеет целое значение, хотя она и меньше размерности несущего пространства (равной 3).



Трехмерный вариант ковра Серпинского

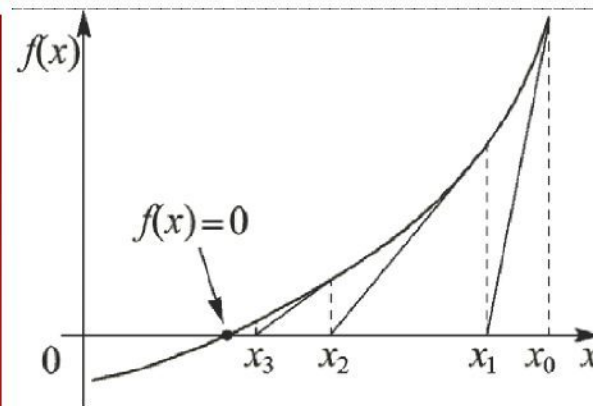
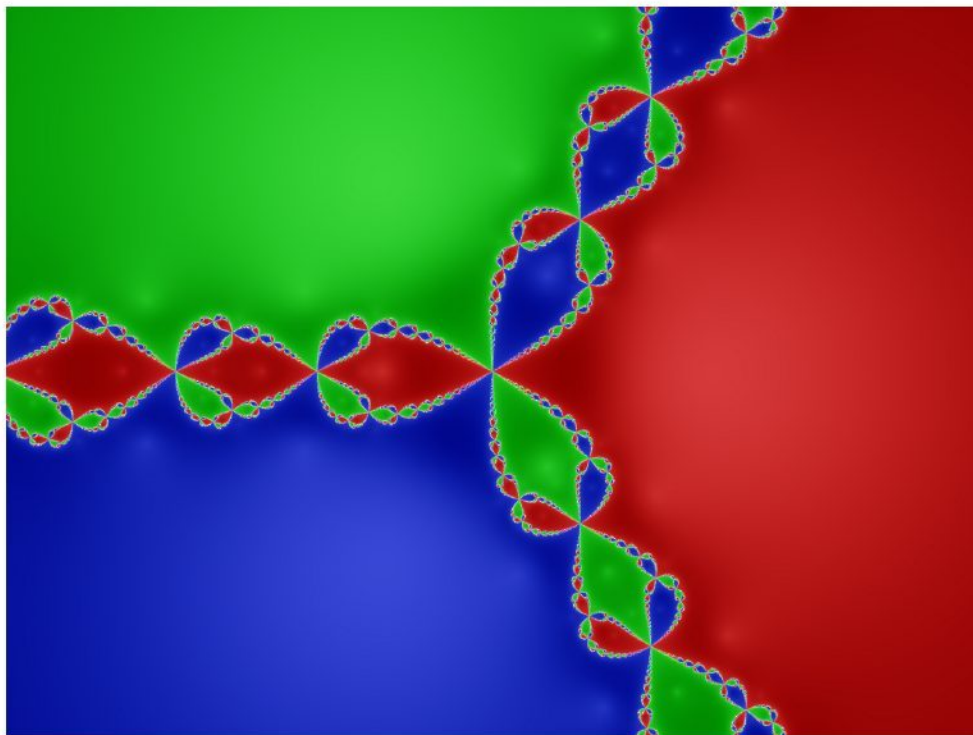
Размерность Хаусдорфа для этой самоподобной конструкции следует непосредственно из первого этапа построения: имея $N = 4$ оставшихся тетраэдров размера $r = 1/2$, мы получаем $D_H = \ln 4 / \ln 2 = 2$, т. е. фрактальная размерность на этот раз оказывается *целой*, хотя и на целую единицу меньше евклидовой размерности $d = 3$ несущего пространства.

Рассмотрим еще одно противоречащее здравому смыслу и вызывающее удивление проявление ковра Серпинского. Для евклидовых тел в d -мерном пространстве объем V пропорционален R^d , где R — некоторый характеристический линейный размер тела. Площадь поверхности S изменяется пропорционально R^{d-1} . Таким образом, $S \sim V^{(d-1)/d}$. Например, в трехмерном пространстве, т. е. при $(d = 3)$, справедлива зависимость $S \sim V^{2/3}$ (вспомним, что для сферы $S = 4\pi R^2 = (36\pi)^{1/3} \cdot V^{2/3}$).

Ковер Серпинского

Однако для фрактальных объектов это простое евклидово соотношение часто нарушается. Как мы уже знаем, для ковра Серпинского размерность Хаусдорфа равна $\ln 3 / \ln 2 \approx 1,58$. А чему равна размерность Хаусдорфа для краев ковра Серпинского? Легко заметить, что всякий раз, когда мы уменьшаем мерный стержень в 2 раза, число отрезков, образующих края, увеличивается в 3 раза. Следовательно, размерность Хаусдорфа для краев, или «поверхности», ковра Серпинского равна $\ln 3 / \ln 2$, т.е. «объем» и «поверхность» имеют одинаковую размерность Хаусдорфа. В этом можно также убедиться, представив массу $M(R)$ ковра, т.е. число точек внутри окружности радиуса R , как функцию радиуса: мы обнаружим, что в среднем $V(R) \sim R^{1,58}$. Но для полной протяженности краев ковра $S(R)$ внутри окружности радиуса R мы получаем ту же самую зависимость $S(R) \sim R^{1,58}$. Следовательно, для ковра Серпинского площадь V и длина краев S пропорциональны друг другу: $V \sim S$. Результат, что и говорить, парадоксальный!

Фрактал Ньютона—Жюлиа или три множества с одной границей



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Решение $f(z) = z^3 - 1 = 0$ методом Ньютона $z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2}$ на комплексной плоскости приводит к фракталу: плоскость раскрашивается в три цвета по бассейнам притяжения корней $1, \omega, \omega^2$ (ω — кубический корень из 1). Идея восходит к Артуру Кэти (конец XIX в.), развита Гастоном Жюлиа и Пьером Фату в 1918–1919 гг. в теории итераций рациональных отображений. [9] [10]

Области имеют сложную фрактальную структуру с общей границей (множество Жюлиа), где сходимость неопределённа; это не противоречит теореме Жордана (о разделении плоскости простой замкнутой кривой), поскольку граница — не кривая, а фрактал нулевой меры с бесконечной длиной.

<https://rutube.ru/video/71c4c07d4d95382078acd10fe8569f59/?>

[utm_source=embed&utm_medium=referral&utm_campaign=logo&utm_content=71c4c07d4d95382078acd10fe8569f59&utm_term=yastatic.net&t=30](https://rutube.ru/video/71c4c07d4d95382078acd10fe8569f59/?utm_source=embed&utm_medium=referral&utm_campaign=logo&utm_content=71c4c07d4d95382078acd10fe8569f59&utm_term=yastatic.net&t=30)

Метод Ньютона для решения уравнений

Для извлечения $\sqrt{a}$ ($a > 0$) решаем $f(x) = x^2 - a = 0$, $f'(x) = 2x$, итерация: $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{a}{x_k})$; этот метод восходит к Герону Александрийскому (I век н.э.), популяризирован Ньютоном в XVII веке. Для a^{-1} решаем $f(x) = \frac{1}{x} - a = 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, итерация: $x_{k+1} = x_k(2 - ax_k)$; обобщением служит метод Ньютона-Шульца для матричных обратных, применяемый в численном обучении больших языковых моделей, включая подход Muon на многообразиях Стифеля.^{[1] [4] [5] [6]}

Для $f(z) = z^2 - 1$ из формулы (1) получаем

$$z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right). \quad (2)$$

Неудивительно, что при начальном значении z_0 с положительной вещественной частью итерации z_n сходятся к положительному корню уравнения $z^2 - 1 = 0$, а именно, к $z = 1$. Аналогично, при начальном

Метод Ньютона для решения уравнений

значении z_0 с отрицательной вещественной частью итерации сходятся к отрицательному корню $z = -1$.

Что же произойдет в случае чисто мнимого начального значения $z_0 = ir_0$, где $r_0 \neq 0$ — число вещественное? Оказывается, при таком начальном значении итерации вообще не сходятся: они, фигурально выражаясь, никак не могут решить, куда же им двигаться, и скачут вдоль мнимой оси в соответствии с отображением

$$r_{n+1} = \frac{1}{2} \left(r_n - \frac{1}{r_n} \right). \quad (3)$$

Например, золотое сечение $0,618 \dots$ последовательно отображается при итерациях в $-0,5$; $0,75$; $-0,291(6)$; $1,566845 \dots$ и т.д. Но некоторые r_0 ведут себя совершенно иначе. Таково, например, начальное значение $r_0 = 1 + \sqrt{2}$, которое отображается в $1, 0$ и ∞ (тоже своего рода неподвижная точка, хотя и весьма удаленная).

Метод Ньютона для решения уравнений

Как можно привести порядок в это хаотическое отображение?
Воспользуемся тригонометрической подстановкой

$$r = -\operatorname{ctg}(\pi\alpha), \quad (4)$$

которая переводит отображение (3) в необычайно простое соотношение

$$\alpha_{n+1} = 2\alpha_n \bmod 1, \quad (5)$$

где «mod 1» означает вычитание целой и сохранение только дробной части, лежащей в полуоткрытом интервале $[0, 1)$. Например, $2,618 \bmod 1 = 0,618$.

Логистическая парабола и удвоение периода

Логистическая парабола и удвоение периода

Предположим, что в процессе экологического, экономического или какого-нибудь другого роста некая величина x_{n+1} для последующего поколения (например, число животных) есть линейная функция от текущего значения этой величины x_n :

$$x_{n+1} = rx_n,$$

где $r > 0$ — *параметр роста*. Неконтролируемый рост следует геометрической прогрессии («экспоненциальному» закону):

$$x_n = r^n x_0,$$

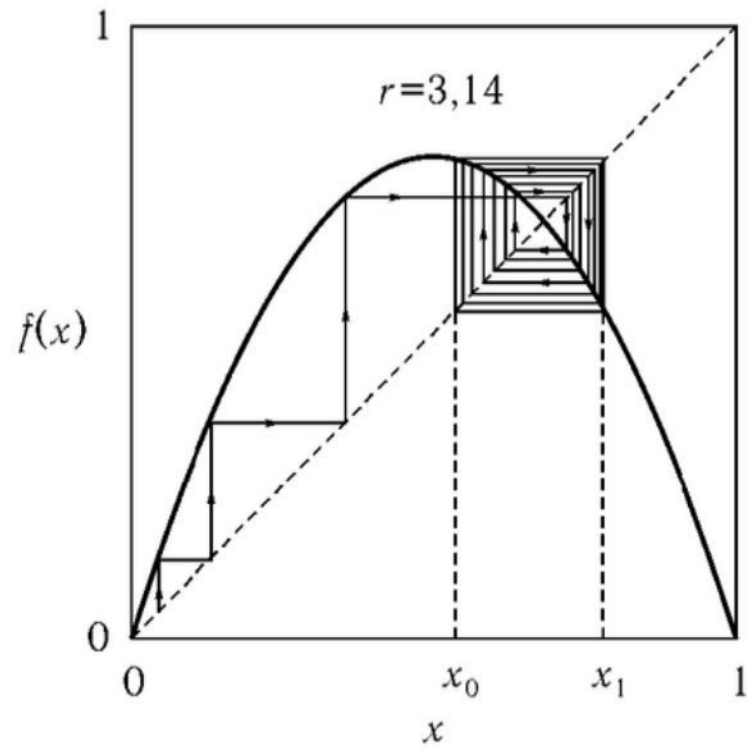
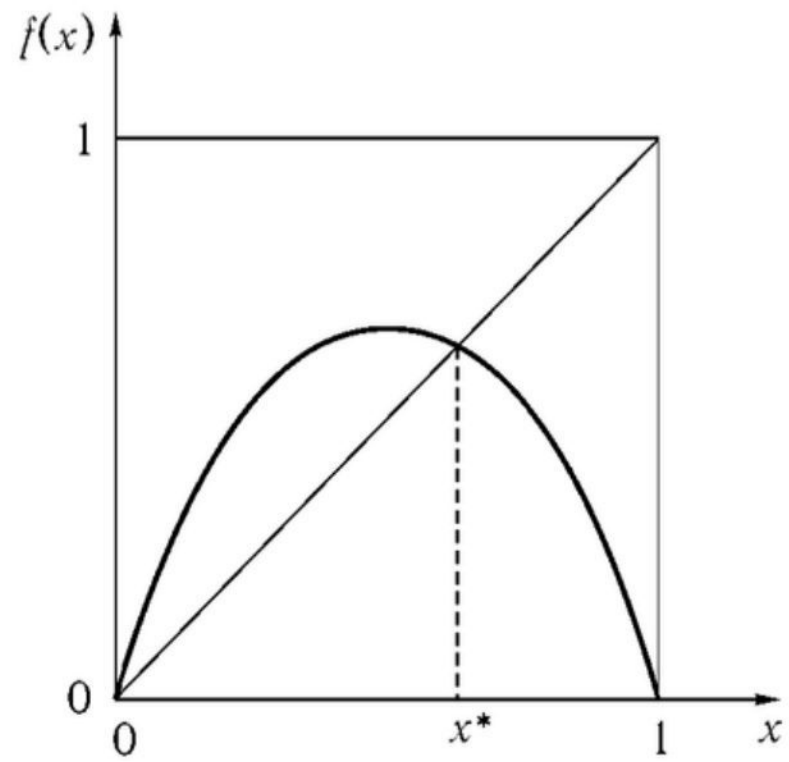
которая при $r > 1$ неограниченно возрастает.

Однако часто случается так, что ограниченное количество ресурсов ограничивает рост. Иначе говоря, чем больше x_n , тем меньше параметр роста r . Проще всего уменьшение фактора роста моделируется заменой r на $r(1 - x_n)$. Тогда при приближении x_n к некоторому пределу (в нашем случае — к единице) параметр роста стремится к нулю. В результате получаем закон роста

$$x_{n+1} = f(x_n) = r(1 - x_n)x_n, \quad (1)$$

называемый *квадратичным отображением*, или — из-за его параболической формы и отношения к снабжению¹ — *логистической параболой* (рис. 2).

Логистическая парабола и удвоение периода



Логистическая парабола и удвоение периода

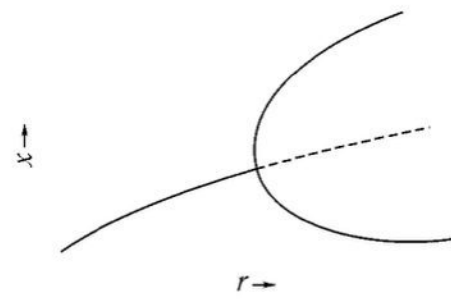
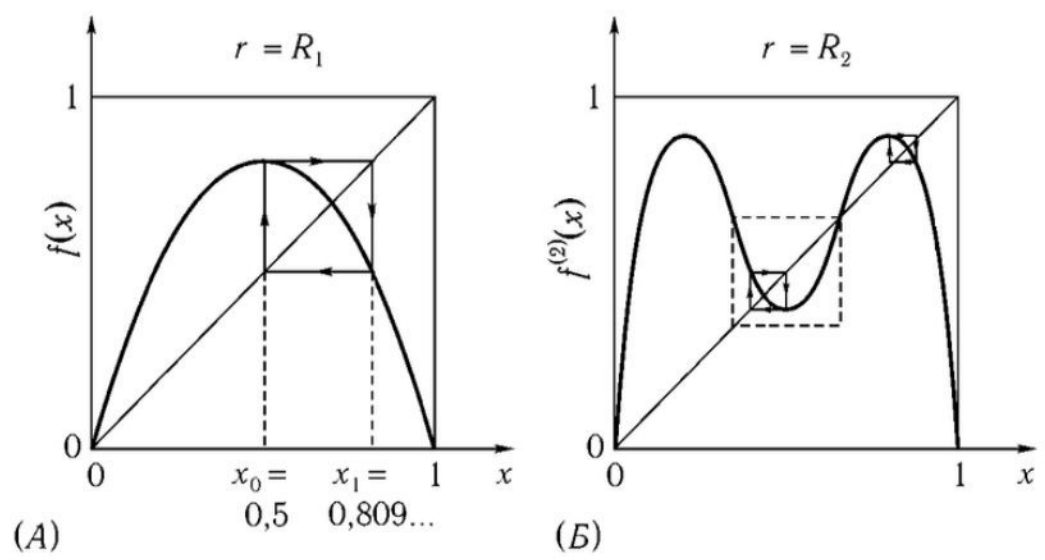


Рис. 6. (А) Квадратичное отображение $f(x)$ для сверхустойчивой орбиты с длиной периода 2. (Б) Однократно итерированное отображение $f^{(2)}(x)$ для орбиты с длиной периода 4. Обратите внимание на подобие между содержанием маленького штрихового квадрата и рисунка (А). Такое самоподобие характерно для удвоения периода и облегчает его анализ [234].

Логистическая парабола и удвоение периода

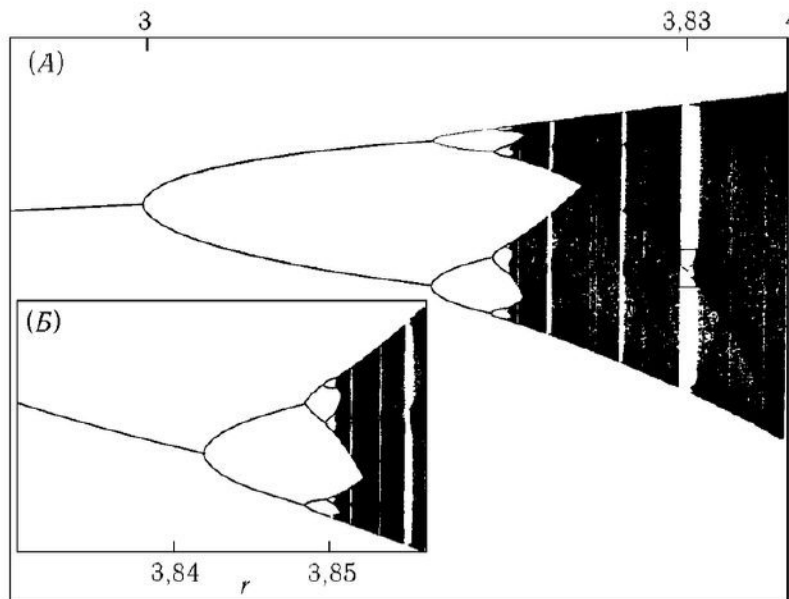
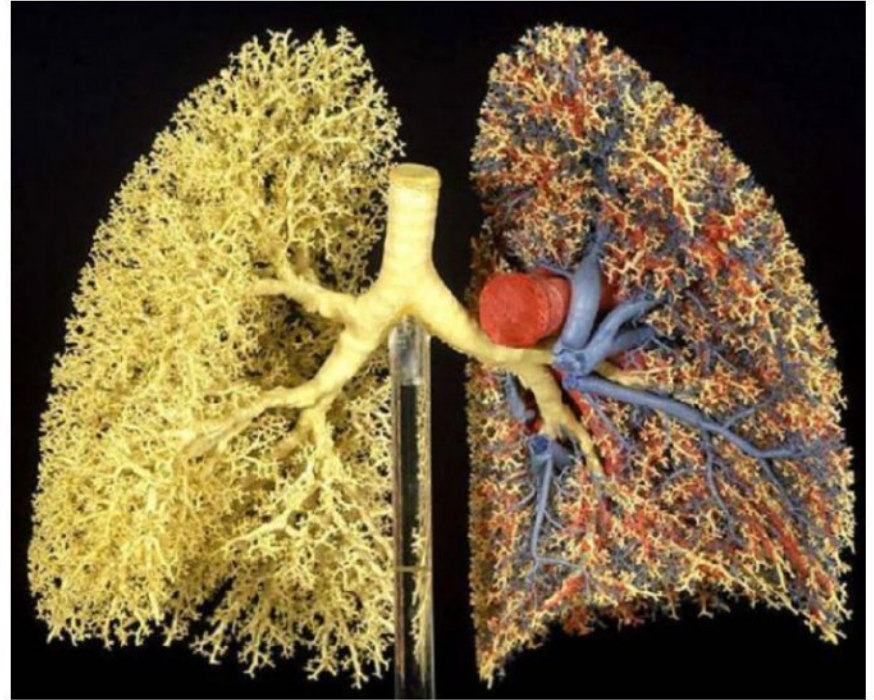


Рис. 10. (А) Итерации квадратичного отображения как функция от параметра роста. Каскад бифуркаций удвоения периода, начинаясь слева, переходит в хаос справа, где итерации принимают хаотический характер. Полосы хаоса перемежаются «окнами периодичности», в которых итерации снова становятся периодическими. Наиболее заметно окно с периодом 3, начинающееся при $r \approx 3,83$. (Б) На увеличенном центральном участке окна с периодом 3 виден еще один каскад удвоения периода, за которым следует второе окно периода 3 (длина периода 9).

Фрактальная природа деревьев и живых организмов



Фрактальная природа деревьев

Биомеханическое ограничение: Правило Леонардо да Винчи

С точки зрения сохранения площади поперечного сечения (что важно для сопротивления ветровым нагрузкам и транспорта соков), деревья подчиняются эмпирическому правилу да Винчи. Если материнская ветвь диаметра d расщепляется на n дочерних ветвей с диаметрами d_i , то:

$$d^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2$$

Фрактальная природа живых организмов

Вывод Закона Мюррея (Murray's Law)

Рассмотрим ламинарное течение ньютоновской жидкости в цилиндрической трубке (сосуде) радиуса r и длины L . Согласно закону Пуазёйля, объемный расход Q и перепад давления ΔP связаны соотношением:

$$\Delta P = \frac{8\mu L Q}{\pi r^4}$$

где μ — динамическая вязкость.

Фрактальная природа живых организмов

Мощность W , затрачиваемая сердцем на прокачку крови через этот сосуд:

$$W = Q\Delta P = \frac{8\mu LQ^2}{\pi r^4}$$

Однако организм тратит энергию не только на трение, но и на метаболическое поддержание самой крови и ткани сосуда. Эта затрата пропорциональна объему сосуда. Пусть C — метаболическая стоимость единицы объема крови. Тогда общая функция энергетических затрат $E(r)$ для одного сосуда равна:

$$E(r) = \frac{8\mu LQ^2}{\pi r^4} + C\pi r^2 L$$

Фрактальная природа живых организмов

Для нахождения оптимального радиуса сосуда при заданном расходе Q , минимизируем $E(r)$ по r :

$$\frac{\partial E}{\partial r} = -\frac{32\mu L Q^2}{\pi r^5} + 2C\pi r L = 0$$

Решая это уравнение относительно Q , получаем:

$$Q = \sqrt{\frac{C\pi^2}{16\mu}} \cdot r^3$$

Фрактальная природа живых организмов

То есть, оптимальный расход пропорционален кубу радиуса: $Q \propto r^3$.

В узле ветвления, где материнский сосуд (радиус r_0 , расход Q_0) делится на два дочерних (r_1, Q_1 и r_2, Q_2), по закону сохранения массы $Q_0 = Q_1 + Q_2$.

Подставляя кубическую зависимость, получаем **Закон Мюррея**:

$$r_0^3 = r_1^3 + r_2^3$$

Для симметричной бифуркации ($r_1 = r_2$) коэффициент масштабирования радиуса равен $s = 2^{-1/3}$.

Универсальная модель Уэста-Брауна-Энkvиста (WBE)

В 1997 году физики Джеффри Уэст, Джеймс Браун и Брайан Энkvист предложили фрактальную модель (WBE), которая объединяет топологию ветвления с аллометрическими законами масштабирования (например, законом Клайбера, утверждающим, что уровень метаболизма $B \propto M^{3/4}$, где M — масса тела).

Модель WBE строится на трех постулатах:

1. Сеть ветвления должна заполнять весь объем организма (фрактальная размерность сети $D = 3$).
2. Энергия, затрачиваемая на распределение ресурсов, минимизируется (выполняется закон Мюррея).
3. Терминальные элементы сети (капилляры, листья) инвариантны по размеру для всех видов.

Универсальная модель Уэста-Брауна-Энквиста (WBE)

Математика заполнения пространства

Пусть сеть имеет k уровней ветвления. На каждом уровне сосуд делится на n ветвей.

Отношение длин сосудов на соседних уровнях: $\gamma = L_{k+1}/L_k$.

Отношение радиусов: $\beta = r_{k+1}/r_k$.

Чтобы сеть была "space-filling" (заполняющей пространство), объем, обслуживаемый одним капилляром, должен сохраняться при масштабировании. Объем ветви пропорционален L_k^3 . Поскольку на следующем уровне ветвей в n раз больше, должно выполняться:

$$n \cdot L_{k+1}^3 \approx L_k^3 \implies \gamma = n^{-1/3}$$

Универсальная модель Уэста-Брауна-Энквиста (WBE)

$$n \cdot L_{k+1}^3 \approx L_k^3 \implies \gamma = n^{-1/3}$$

Из закона Мюррея (сохранение энергии) мы знаем, что для радиусов:

$$r_k^3 = n \cdot r_{k+1}^3 \implies \beta = n^{-1/3}$$

Однако, в крупных сосудах (аорта) поток пульсирующий, и там работает сохранение площади (как у деревьев да Винчи), что дает $\beta = n^{-1/2}$. Переход от $\beta = n^{-1/2}$ к $\beta = n^{-1/3}$ по мере уменьшения сосудов и перехода к ламинарному течению является ключевым математическим свойством кровеносной системы, обеспечивающим фрактальную размерность распределения ресурсов, равную $4/3$ по отношению к физическому объему, что элегантно выводит показатель степени $3/4$ в законе Клайбера.

Закон Клайбера

Закон Клайбера (Kleiber's law) — это фундаментальное эмпирическое правило в биологии и биофизике, которое связывает базовый уровень метаболизма организма (количество энергии, потребляемое в состоянии покоя) с его массой.

Для математика этот закон интересен тем, что он ломает наивную геометрическую интуицию и требует привлечения фрактальной геометрии для своего объяснения.

Математическая формулировка

Закон утверждает, что базовый уровень метаболизма B масштабируется пропорционально массе тела M в степени $3/4$:

$$B = B_0 \cdot M^{3/4}$$

где B_0 — нормализующая константа, зависящая от таксона (например, для млекопитающих она одна, для рептилий — другая, но показатель степени $3/4$ остается неизменным).

Закон Клайбера—Горшкова

Почему это математический парадокс? (Проблема 2/3)

До открытия Макса Клайбера в 1932 году ученые полагали, что метаболизм должен масштабироваться со степенью $2/3$. Логика (изометрическое масштабирование) была безупречной с точки зрения классической евклидовой геометрии:

1. Теплоотдача организма происходит через поверхность тела.
Следовательно, чтобы поддерживать постоянную температуру, выработка энергии (метаболизм B) должна быть пропорциональна площади поверхности S : $B \propto S$.
2. Если мы рассматриваем животных как изометричные трехмерные объекты (сохраняющие пропорции при увеличении), то их объем V пропорционален кубу линейного размера L : $V \propto L^3$.
3. Масса M пропорциональна объему: $M \propto V \propto L^3$.
4. Площадь поверхности S пропорциональна квадрату линейного размера:
 $S \propto L^2$.
5. Выражая S через M , получаем: $S \propto (M^{1/3})^2 = M^{2/3}$.

Следовательно, ожидалось, что $B \propto M^{2/3}$. Однако эмпирические данные на огромном диапазоне масс (от мыши до слона) упрямо показывали степень $3/4$.

Закон Клайбера—Горшкова

Разрешение парадокса: Фрактальная размерность (Модель WBE)

Как упоминалось в предыдущем ответе, физики Уэст, Браун и Энkvист (модель WBE) доказали, что степень $3/4$ возникает из-за **фрактальной природы транспортных сетей** (кровеносной системы).

Организм — это не просто гладкий трехмерный шар. Питательные вещества доставляются к клеткам через иерархическую фрактальную сеть сосудов.

Математика этого процесса такова:

Закон Клайбера—Горшкова

1. Метаболизм B ограничен количеством терминальных узлов сети (капилляров), через которые происходит обмен веществ. Пусть их количество равно N_c . Тогда $B \propto N_c$.
2. Эволюция оптимизировала эту сеть так, чтобы она заполняла весь трехмерный объем тела (space-filling fractal), минимизируя при этом гидродинамическое сопротивление (закон Мюррея).
3. Из-за того, что сеть должна ветвиться и заполнять объем, сохраняя инвариантный размер конечного капилляра (капилляры мыши и слона примерно одинакового размера), эффективная "площадь поверхности" для обмена веществ внутри тела растет быстрее, чем внешняя площадь поверхности тела.

Закон Клайбера—Горшкова

Следствия закона Клайбера (Аллометрическое масштабирование)

Из степени $3/4$ математически выводятся многие другие биологические константы (quarter-power scaling laws):

- Частота сердцебиения масштабируется как $M^{-1/4}$ (у слона сердце бьется медленнее, чем у мыши).
- Продолжительность жизни масштабируется как $M^{1/4}$ (слоны живут дольше мышей).
- Если умножить частоту сердцебиения на продолжительность жизни ($M^{-1/4} \cdot M^{1/4} = M^0 = 1$), мы получим константу. Это математическое обоснование того факта, что почти у всех млекопитающих за жизнь сердце совершает примерно одинаковое количество ударов (около 1.5 миллиардов).